

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 飛刀創成之蝸輪與 ZK 型蝸桿之接觸特性研究(3/3) 研究成果報告(完整版)

計畫類別：個別型  
計畫編號：NSC 95-2221-E-159-010-  
執行期間：95 年 08 月 01 日至 96 年 07 月 31 日  
執行單位：明新科技大學機械工程系

計畫主持人：蔡忠杓

計畫參與人員：博士班研究生-兼任助理：陳冠宇、趙立基  
碩士班研究生-兼任助理：黃健育

報告附件：國外研究心得報告  
出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫涉及專利或其他智慧財產權，2 年後可公開查詢

中 華 民 國 96 年 10 月 26 日

## 中文摘要

蝸桿蝸輪組(Worm Gear Set)具有高傳動減速比，低噪音及結構緊湊等特點，是工業上常用的空間交錯軸(Crossed Axes)傳動機構。增加蝸桿蝸輪組之接觸比(Contact Ratio)除了可以提高其定位精度與穩定度外，同時亦可使蝸桿蝸輪組傳遞更大的負荷。本專題係研究非對偶創成之非  $90^\circ$  交錯角蝸桿蝸輪組，其蝸桿是使用錐狀盤形磨輪來加以研磨之單包絡 ZK 型蝸桿，並且以飛刀(Fly Cutter)配合非  $90^\circ$  之交錯角之創成機構來切製蝸輪。此種方式將可增加蝸桿蝸輪組之接觸比，使得蝸桿蝸輪組能傳遞更高的負載。

在本專題研究計畫中，依據齒輪原理(Theory of Gearing)並利用錐狀盤形磨輪(Conical-Shaped Grinding Wheel)來推導出單包絡 ZK 型蝸桿之齒面數學模式，並以飛刀來推導蝸輪之齒面數學模式，再配合微分幾何原理(Differential Geometry)及數值方法，探討此蝸輪之齒面過切問題，以了解刀具設計參數之改變對其滾削之蝸輪齒面的影響，並應用齒面接觸分析(Tooth Contact Analysis)技術，分析此蝸桿蝸輪組在具有裝配偏差時，其傳動誤差(Transmission Errors)及接觸比，而此蝸桿蝸輪組之接觸齒印則係利用齒面外形法(Tooth Surface Topology Method)求得。最後，本專題研究計畫使用有限單元法進行此蝸桿蝸輪組在負載下之齒面接觸分析(Loaded Tooth Contact Analysis)。

本專題研究計畫為三年期之研究計畫，計畫之第一年(93 年 8 月至 94 年 7 月)，係利用錐狀盤形之磨輪，配合切削單包絡 ZK 型蝸桿之加工機構，再應用齒輪原理及微分幾何的觀念，推導單包絡 ZK 型蝸桿之齒面數學模式。其次再利用軌跡法，由飛刀之運動方式來定義切製蝸輪所需之蝸桿型滾刀(Worm-Type Hob Cutter)外形，再配合滾削蝸輪之機構，推導由飛刀所創成之蝸輪的齒面數學模式。通常在壓力角較小的情況下，被創成之蝸輪齒面很容易產生過切(Undercutting)現象，造成齒根應力集中以及接觸齒面過小。因此，本計畫利用所建立之齒面數學模式，推導蝸輪齒面發生過切之條件式，以計算出蝸輪齒面上的過切線，並探討在不同設計參數下齒

面的過切狀況，以供選取適當之刀具參數及加工條件。

本專題研究計畫之第二年(94 年 8 月至 95 年 7 月)，則將 ZK 型蝸桿之齒面數學模式與由飛刀創成之蝸輪齒面的數學模式經由座標轉換，建立包含組裝誤差在內的非對偶創成且非  $90^\circ$  交錯角之蝸桿蝸輪組在實際接觸嚙合時的數學模式，利用此嚙合模型所發展的齒面接觸分析電腦軟體，即可探討蝸桿蝸輪組在不同的裝配狀況與設計參數下的傳動誤差及接觸點之分佈。此外，亦利用自行發展的齒輪組接觸比之分析軟體，來計算此蝸桿蝸輪組在不同的裝配狀況與設計參數下的接觸比。

本專題研究計畫之第三年(95 年 8 月至 96 年 7 月)，則利用齒面接觸外形法來求解並預測非對偶創成之非  $90^\circ$  交錯角蝸桿蝸輪組之接觸橢圓，亦即假設齒面為剛體的情況下，以齒面幾何外形為基礎，來預測在不同的齒輪設計參數下，兩齒面的接觸齒印大小與位置。齒面接觸外形法係假設齒面為剛體的條件下進行齒面接觸分析，然而在實際的蝸桿蝸輪組嚙合時，齒面的接觸狀況十分複雜，為了得到更真實的結果，將利用有限單元法(Finite Element Method)來探討負載下兩齒面的接觸情況。由第一年所推導的齒面數學模式，建立一對接觸齒的實體模型(Solid Model)，再將三維齒面做網格分割以及設定適當的負載、齒面摩擦力、材料性質及邊界條件...等，然後利用國科會補助之經費承租 ABAQUS 有限單元應力分析軟體，來模擬齒輪組在負載下的齒面應力分佈與齒面變形，以得到較接近於實際具有負載嚙合狀態下的齒面接觸分析結果。

關鍵詞：ZK 型蝸桿，飛刀創成蝸輪，齒面過切，齒輪嚙合原理，非  $90^\circ$  交錯角蝸桿蝸輪組齒面接觸分析，傳動誤差，接觸比，齒面外形法，接觸橢圓，有限單元法，負載下齒面接觸分析

## **Abstract**

Due to high transmission ratios, low noise and compact structures, the worm gear set is widely used in gear-reduction mechanisms for transmitting torques between crossed axes. Increasing the contact ratio of a worm gear set not only improves the orientation precision and transmission stability, but also increases the loading capacity of the worm gear set. In this research project, the worm gear set is composed of the ZK type worm and the worm gear generated by a fly cutter with a non-ninety-degree crossing angle. The proposed approach can increase the contact ratio of a worm gear set, and it makes the worm gear set providing a higher loading ability.

In this research project, the mathematical models of the ZK-type worm and the worm gear generated by a fly cutter have been developed based on the worm gear drive generation mechanism and the theory of gear meshing. According to the developed gear tooth mathematical model, the tooth undercutting of the worm gear set can be analyzed. In this research project, the tooth contact analysis technology has been utilized to the investigations on transmission errors and contact ratios of the worm gear set under ideal and error assembly conditions. The contact ellipses of the worm gear set can be obtained by applying the contact surface topology method. Finally, the contact stress contours on the tooth surfaces and the tooth deformation have been investigated by employing the finite element stress analysis software.

The proposed research project is a three-year project. In the first year, based on the conical-shaped grinding wheel and the practical cutting mechanism, the mathematical model of the ZK-type worm surface can be derived according to the theory of gearing and differential geometry. Furthermore, the mathematical model of the worm gear surface generated by a fly cutter is developed by considering the profiles of cutting tools and the machine-tool settings. Usually, tooth undercutting occurs under some certain conditions such as small pressure angle, which consequently results in stress concentration near the

tooth fillets. On the basis of the developed mathematical model of the tooth surface, the condition of tooth undercutting can be obtained and the undercutting line on the tooth surface can be calculated and plotted. Tooth undercutting under various combinations of design parameters was studied.

In the second year of the research project, a mathematical model for the worm gear, generated by a fly cutter, meshed with the ZK type worm with a non-ninety-degree crossing angle was set up firstly. Additionally, the assembly errors were considered in the mathematical model of this worm gear sets. Owing to non-conjugate contact for the ZK-type worm and worm gear generated by a fly cutter, the proposed worm gear sets exhibit point contact instead of line contact. Tooth contact analysis (TCA) was adopted to determine the bearing contacts and transmission errors of the worm gear sets. Moreover, the effects of assembly conditions and design parameters on the transmission errors and the contact ratios were also studied.

In the third year of the research project, the directions and dimensions of the contact ellipses of the worm gear set can be determined by applying the contact surface topology method. The influences of design parameters on the dimension of contact ellipses were also investigated. The tooth surface was assumed to be rigid when the contact ellipses were determined by contact surface topology method. However, in practical applications, the worm gear set is under load during transmissions. To obtain more realistic simulation results, loaded tooth contact analysis (LTCA) was performed by employing the finite element stress analysis software on the workstation. An automatic meshes generation program for the three-dimensional tooth surface was developed based on the mathematical model proposed in the first year. Furthermore, the contact stress contours on the tooth surfaces and the tooth deformation were investigated. The results obtained from LTCA are more realistic and helpful than those obtained from TCA.

Keywords : ZK-Type Worm, Worm Gear Generated by a Fly Cutter, Tooth Undercutting, Theory of Gear Meshing, Worm Gear Set with a Non-ninety-degree Crossing Angle, Tooth Contact Analysis, Transmission Error, Contact Ratio, Surface Topology Method, Contact Ellipse, Finite Element Method, Loaded Tooth Contact Analysis.

## 目 錄

前 言 .....	1
研究目的 .....	3
研究方法 .....	7
結果與討論 .....	9
第一章 飛刀創成之蝸輪與ZK型蝸桿之齒面數學模式 .....	9
1.1 創成原理 .....	9
1.2 磨輪及滾刀參數設計及其幾何數學模式 .....	10
1.3 ZK型蝸桿與飛刀創成蝸輪之數學模式 .....	16
第二章 飛刀創成之蝸輪齒面之齒形過切分析 .....	24
2.1 蝸輪齒面之齒形過切數學條件式 .....	24
2.2 飛刀創成蝸輪之範例 .....	26
第三章 飛刀創成之蝸輪與ZK型蝸桿之接觸分析 .....	32
3.1 齒面接觸分析之數學模式 .....	32
3.2 運動誤差與接觸比 .....	36
3.3 蝸桿蝸輪組之接觸模擬 .....	39
第四章 飛刀創成之蝸輪與ZK型蝸桿之接觸齒印分析 .....	45
4.1 齒面外形法 .....	45
4.2 接觸齒印範例 .....	50
第五章 飛刀創成之蝸輪與ZK型蝸桿之有限單元分析 .....	53
5.1 有限單元接觸分析之實體模型建立 .....	53
5.1.1 物理特性設定 .....	53
5.1.2 有限單元網格 .....	54
5.2 接觸面與表面特性定義 .....	54
5.3 邊界條件(Boundary Condition)與負載(Load)之定義 .....	56
5.4 結果分析 .....	57
參考文獻 .....	61
計劃成果自評 .....	65

## 前 言

蝸桿蝸輪組(Worm Gear Set)具有高傳動減速比，低噪音及結構緊湊等特點，是工業上常用的空間交錯軸(Crossed Axes)傳動機構。增加蝸桿蝸輪組之接觸比(Contact Ratio)除了可以提高其定位精度與穩定度外，同時亦可使蝸桿蝸輪組傳遞更大的負荷。本專題將研究非對偶創成之非  $90^\circ$  交錯角蝸桿蝸輪組。其蝸桿是使用錐狀盤形磨輪來加以研磨之單包絡 ZK 型蝸桿，並且以飛刀(Fly Cutter)配合非  $90^\circ$  之交錯角之創成機構來切製蝸輪。此種方式將可增加蝸桿蝸輪組之接觸比，使得蝸桿蝸輪組能傳遞更高的負載。

在本專題研究計畫中，依據齒輪原理(Theory of Gearing)並利用錐狀盤形磨輪(Conical-Shaped Grinding Wheel)來推導出單包絡 ZK 型蝸桿之齒面數學模式，並以飛刀來推導蝸輪之齒面數學模式，再配合微分幾何原理(Differential Geometry)及數值方法，探討此蝸輪之齒面過切問題，以了解刀具設計參數之改變對其滾削之蝸輪齒面的影響，並應用齒輪接觸分析(Tooth Contact Analysis)技術，分析此蝸桿蝸輪組在具有裝配偏差時，其傳動誤差(Transmission Errors)及接觸比，而此蝸桿蝸輪組之接觸齒印則係利用齒面外形法(Tooth Surface Topology Method)求得。最後，本專題研究計畫使用有限單元法進行此蝸桿蝸輪組在負載下之齒面接觸分析(Loaded Tooth Contact Analysis)。

本專題研究計畫為三年期之研究計畫，計畫之第一年(93 年 8 月至 94 年 7 月)，係利用錐狀盤形之磨輪，配合切削單包絡 ZK 型蝸桿之加工機構，再應用齒輪原理及微分幾何的觀念，推導單包絡 ZK 型蝸桿之齒面數學模式。其次再利用軌跡法，由飛刀之運動方式來定義切製蝸輪所需之蝸桿型滾刀(Worm-Type Hob Cutter)外形，再配合滾削蝸輪之機構，推導由飛刀所創成之蝸輪的齒面數學模式。通常在壓力角較小的情況下，被創成之蝸輪齒面很容易產生過切(Undercutting)現象，造成齒根應力集中以及接觸齒面過小。因此，本計畫利用所建立之齒面數學模式，推導蝸輪齒面發生過切之條件式，以計算出蝸輪齒面上的過切線，並探討在不同設計參數下齒



面的過切狀況，以供選取適當之刀具參數及加工條件。

本專題研究計畫之第二年(94 年 8 月至 95 年 7 月)，則將 ZK 型蝸桿之齒面數學模式與由飛刀創成之蝸輪齒面的數學模式經由座標轉換，建立包含組裝誤差在內的非對偶創成且非  $90^\circ$  交錯角之蝸桿蝸輪組在實際接觸嚙合時的數學模式，利用此嚙合模型所發展的齒面接觸分析電腦軟體，即可探討蝸桿蝸輪組在不同的裝配狀況與設計參數下的傳動誤差及接觸點之分佈。此外，亦利用自行發展的齒輪組接觸比之分析軟體，來計算此蝸桿蝸輪組在不同的裝配狀況與設計參數下的接觸比。

本專題研究計畫之第三年(95 年 8 月至 96 年 7 月)，則利用齒面接觸外形法來求解並預測非對偶創成之非  $90^\circ$  交錯角蝸桿蝸輪組之接觸橢圓，亦即假設齒面為剛體的情況下，以齒面幾何外形為基礎，來預測在不同的齒輪設計參數下，兩齒面的接觸齒印大小與位置。齒面接觸外形法係假設齒面為剛體的條件下進行齒面接觸分析，然而在實際的蝸桿蝸輪組嚙合時，齒面的接觸狀況十分複雜，為了得到更真實的結果，也利用有限單元法(Finite Element Method)來探討負載下兩齒面的接觸情況。由第一年所推導的齒面數學模式，建立一對接觸齒的實體模型(Solid Model)，再將三維齒面做網格分割以及設定適當的負載、齒面摩擦力、材料性質及邊界條件...等，然後利用國科會補助之經費承租 ABAQUS 有限單元應力分析軟體，來模擬齒輪組在負載下的齒面應力分佈與齒面變形，以得到較接近於實際具有負載嚙合狀態下的齒面接觸分析結果。

## 研究目的

蝸桿蝸輪組(Worm Gear Set)是工業上常用的空間交錯軸(Crossed Axes)傳動機構。蝸桿之節圓半徑與蝸桿齒數無關，使得蝸桿蝸輪組的單級傳動可以實現較大的傳動減速比，實際應用上可達約 8 至 100 之間，此種單級大減速比的特性，可代替多級之一般齒輪傳動所能達到之減速比，因此具有可減少齒輪對之數目以及簡化傳動機構之特點。此外，蝸桿蝸輪機構還有自鎖(Self Locking)的特性，當蝸桿導程角小於蝸輪組之摩擦角時，該蝸桿蝸輪組即可具有自鎖之作用。一般齒輪組傳遞動力時，齒面接觸點大部份在節點附近並以滾動為主，而蝸輪組在傳遞動力時，則以滑動為主，並且蝸桿蝸輪組的瞬間嚙合齒數大於二齒，屬於高接觸比齒輪組，因此，蝸輪組在工作時相當平穩且噪音較小。以上之特性使得蝸桿蝸輪組被廣泛地應用在各種需要大減速比的機構中。然而，蝸桿蝸輪組亦有必須加以改善之處，例如：摩耗嚴重，因而傳動效率低；切製蝸輪之滾刀均為專用滾刀，使得製造成本昂貴。近年來，由於建築高樓化的趨勢，電梯中最常使用的蝸桿蝸輪減速機構之需求也日益增加。此外，傳統的汽車轉向機構與連續分度機構也皆以蝸桿蝸輪之傳動機構做為基礎設計。隨著工業產品對其定位精度之要求越趨升高，例如雷達及大型天文望遠鏡所需的赤道儀及 DVD 碟盤與讀寫頭之定位機構等，其精密傳動機構也多採用蝸桿蝸輪組。

國內外已有多位學者對於蝸桿蝸輪的設計和製造作出相當大的貢獻。有關蝸桿蝸輪的製造方面：Bosch[1]於 1988 年提出利用電腦數值控制(CNC)的磨輪機來製造低成本且具有高精度蝸桿的方法。Zheng[2,3]等人於 1989 年，利用一條動線(Generating Line)在空間運動所產生之軌跡面，用來表示蝸桿之齒面，並討論其製造加工程序。Colbourne[4]亦於 1989 年利用增徑滾刀滾削蝸輪齒面，配合等距線觀念，來探討蝸齒之刀具-機器設定對接觸的影響。Oiwa 等人[5]於 1990 年提出能得到較精確蝸桿外形的各種輪磨方法。Simon[6]於 1993 年探討最佳磨輪刀具設定，來提高滾刀重磨之加工精度。Kin[7]於 1993 年則探討滾刀外形改變時，蝸輪齒面相對應變異量改變之情形。Litvin[8]於 1994 年建立以指狀銑刀(Pencil Type Milling Cutter)和盤狀磨輪(Disk

Type Grinding Wheel)所銑削蝸桿之齒面數學模式。

一般齒面為規則曲面(Regular Surface)，當齒面存在奇異點時，齒面強度會減低，同時亦會響齒面之傳動精度。Litvin 等人[9]於 1990 年探討共軛之蝸桿與蝸輪齒面的幾何限制，以避免齒面上產生奇點等問題。Kin[10]也於同年提出了蝸桿齒面避免過切的限制條件。Fong 和 Tsay[11]於 1992 年利用齒輪齒面的單位法向量來計算蝸線斜齒輪之過切線。Simon[12]於 1992 利用有限單元來研究二次包絡蝸桿蝸輪組之齒面設計參數對蝸輪齒面應力分佈情形之影響。Simon[13]於 1994 年針對以圓弧邊之磨輪所磨削之蝸桿，利用蝸輪齒面上之接觸線研究其蝸輪齒面之應力負荷以及能量損耗之情形。Litvin 和 Seo[14]於 1996 年發展出雙變數過切條件式，但是未實際運用於蝸桿蝸輪組之設計。

齒形製造誤差及齒輪裝配誤差將使得齒輪組在傳遞運動的過程中產生運動誤差。各種齒形在傳遞運動的過程，對於裝配偏差及齒形製造誤差之敏感度各不相同，因此所造成的運動誤差亦不同。關於齒輪組運動誤差的研究：Janninck[15]於 1988 年提出齒面外形法(Surface Topology Method)，來模擬利用增徑滾刀(Over Size Hob Cutter)滾削蝸輪時其創成齒面之接觸情形。Litvin 與 Kin[16]於 1992 年提出了單包絡蝸桿蝸輪組的嚙合及其接觸點的電腦模擬，並以漸開線型蝸桿為例來說明之。Bair 和 Tsay[17]於 1998 年則探討了 ZK 型雙導程蝸桿蝸輪組之接觸齒數、接觸比和運動誤差。

對偶創成之齒輪組，在理想裝配狀況下屬於線接觸傳動機構，例如 ZA 型、ZN 型、ZK 型或是 ZE 型之蝸桿蝸輪組。Fang 和 Tsay[18,19] 於 1996 年及 2000 年以齒面接觸分析(Tooth Contact Analysis)分別計算 ZK 型及 ZN 型蝸桿蝸輪組之接觸點及其接觸齒印(Contact Pattern)的大小和形狀，並探討其嚙合接觸路徑(Contact Path)，同時將不同型態之蝸桿與蝸輪以  $90^\circ$  交錯角進行接觸分析，其結果顯示不同型態(即非對偶創成)之蝸桿蝸輪組，屬於點接觸傳動機構，而且特殊配對的蝸桿蝸輪組，具有相當大的運動誤差。Fang 和 Tsay 並提出利用增徑滾刀的方式來切製蝸輪，可以有效地減少非對偶創成蝸桿蝸輪組之運動誤差。

增加齒輪之強度的其中一種方法為增加齒輪在嚙合時的接觸比。當齒輪組具有較大的接觸比時，由於傳動瞬間有多齒接觸，所以可以降低齒輪組的傳動誤差 (Transmission Error) 與齒面接觸應力，並減少疲勞破壞所引起的點蝕現象和齒輪組傳動的振動及噪音。Arakawa 和 Emura[20]於 1995 年分析橢圓形齒輪組的瞬時接觸比和沿著節圓所計算的平均節圓接觸比，當改變初始計算位置時，則平均節圓接觸比亦跟著改變，至於瞬時接觸比定義為接觸長除以法向節距。Umeyama 等人[21]於 1996 年利用齒輪接觸分析所計算的運動誤差曲線來計算接觸齒數。

以上對於蝸桿蝸輪組之研究眾多，然而，有關非對偶創成之非  $90^\circ$  交錯角蝸桿蝸輪組之齒面數學模式和齒面接觸分析、接觸橢圓及應力分析等並未加以研究。基於上述背景及目的，本研究計畫首先利用機構學原理、齒輪嚙合原理及微分幾何的觀念，建構錐狀盤形磨輪來推導其所創成之單包絡 ZK 型蝸桿齒面數學模式，並以飛刀配合非  $90^\circ$  之交錯角之創成機構來推導其所創成之蝸輪齒面數學模式。接著，利用所推導之齒面數學模式進行蝸桿蝸輪組之齒面過切分析，以提供刀具參數設計。齒面接觸分析及接觸橢圓模擬，則係研究蝸桿蝸輪組在具有裝配誤差狀況下之嚙合特性。

本研究所探討的對象為非對偶創成之非  $90^\circ$  交錯角蝸桿蝸輪組。其蝸桿是使用錐狀盤形磨輪來加以研磨之單包絡 ZK 型蝸桿，並且以飛刀配合非  $90^\circ$  之交錯角之創成機構來切製蝸輪。此種方法增加了蝸桿蝸輪組之接觸比，使得蝸桿蝸輪組能提供更高的負載，這也是本研究的創新處。非對偶創成之非  $90^\circ$  交錯角蝸桿蝸輪組，屬於點接觸傳動機構，其最大的特點是當蝸桿蝸輪組在理想裝配狀況下，沒有運動誤差，同時亦可透過改變蝸桿的壓力角，來控制此蝸桿蝸輪組之接觸點軌跡於蝸輪齒面上之位置。這種構想是蝸桿蝸輪組在應用上的一大改進。因此，所發展之蝸桿蝸輪組非常適合用於精密機械之傳動。所以該型蝸桿蝸輪組非常值得深入研究，以利產業之實用化並提昇我國之產業技術和產品水準。

本專題研究計畫執行完畢後，已經建立起一套含括非對偶創成之非  $90^\circ$  交錯角蝸桿蝸輪組從設計、分析及模擬之完整流程，這對於提昇我國齒輪業者之設計、製造與分析能力將大有助益。相信藉由此一研究計畫之推展，將可提高國內業界對非對偶創

成之非  $90^\circ$  交錯角蝸桿蝸輪組之認識並建立其設計與製造能力，有助於精密傳動技術之提昇，藉此達到產業升級的目的。

## 研究方法

本專題研究計畫第一年(93 年 8 月至 94 年 7 月)，係利用錐狀盤形之磨輪，配合切削單包絡 ZK 型蝸桿之加工機構，再應用齒輪原理及微分幾何的觀念，推導單包絡 ZK 型蝸桿之齒面數學模式。其次再利用軌跡法，由飛刀之運動方式來定義切製蝸輪所需之蝸桿型滾刀(Worm-Type Hob Cutter)外形，再配合滾削蝸輪之機構，推導由飛刀所創成之蝸輪的齒面數學模式。通常在壓力角較小的情況下，被創成齒面很容易產生過切(Undercutting)現象，造成齒根應力集中以及接觸齒面過小。因此，本計畫將利用所建立之齒面數學模式，推導蝸輪齒面發生過切之條件式，以計算出蝸輪齒面上的過切線，並探討在不同設計參數下齒面的過切狀況，以供選取適當之刀具參數及加工條件。

本專題研究計畫之第二年(94 年 8 月至 95 年 7 月)，則將第一年已建立之 ZK 型蝸桿的齒面數學模式與由飛刀創成之蝸輪齒面的數學模式經由座標轉換，建立包含組裝誤差在內的非對偶創成之非  $90^\circ$  交錯角蝸桿蝸輪組在實際接觸嚙合時之數學模式，利用此嚙合模型所發展的齒面接觸分析電腦軟體，將可探討蝸桿蝸輪組在不同的裝配狀況與設計參數下的傳動誤差及接觸點之分佈。此外，亦將利用自行發展的接觸比分析軟體來計算此蝸桿蝸輪組在不同的裝配狀況與設計參數下的接觸比。

本專題研究計畫之第三年(95 年 8 月至 96 年 7 月)，係利用齒面接觸外形法來求解並預測非對偶創成之非  $90^\circ$  交錯角蝸桿蝸輪組之接觸橢圓，亦即假設齒面為剛體的情況下，以齒面幾何外形為基礎，來預測在不同的設計參數下，兩齒面的接觸齒印大小與位置。齒面接觸外形法係假設齒面為剛體的條件下進行齒面接觸分析，然而在實際的蝸桿蝸輪組嚙合時，齒面的接觸狀況十分複雜，為了得到更真實的結果，本研究乃利用有限單元法(Finite Element Method)探討負載下兩齒面的接觸情況。由第一年所推導的齒面數學模式，建立一對接觸齒的實體模型(Solid Model)，再將三維齒面做網格分割以及設定適當的負載、齒面摩擦力、材料性質及邊界條件...等，然後利用國科會補助之經費承租的 ABAQUS 有限單元應力分析軟體，模擬齒輪組在負載下的齒面

應力分佈與齒面變形，以得到較接近於實際具有負載嚙合狀態下的齒面接觸分析 (Loaded Tooth Contact Analysis) 結果。

## 結果與討論

### 第一章 飛刀創成之蝸輪與 ZK 型蝸桿之齒面數學模式

#### 1.1 創成原理

一般常見的單包絡 ZK 型蝸桿蝸輪組，其創成方式是先使用錐狀盤形磨輪來磨削蝸桿，再利用蝸桿型滾刀來加工蝸輪。由於蝸桿與滾刀均可利用磨輪研磨的方式來提高精度，因此，可製造出高精度之蝸桿蝸輪組。本研究係採用 ZK 型蝸桿為本研究中非  $90^\circ$  交錯角蝸桿蝸輪組之主動件。然而，當齒面是以創成法所加工出來時，由於 ZK 型蝸桿之齒面為磨輪刀具之包絡面，且被創成之齒面與磨輪刀具間之接觸恆保持相切之情況，因此，在推導 ZK 型蝸桿齒面數學方程式時，除需考量磨輪刀具在被切削之蝸桿齒面上的軌跡方程式外，尚需考慮磨輪刀具與蝸桿齒面間之嚙合方程式。由於在 ZK 型蝸桿之創成過程中，是使用錐狀盤形磨輪來磨削蝸桿之齒面，因此，磨輪之左刀具面創成了蝸桿之右齒面，而磨輪之右刀具面則創成了蝸桿之左齒面。圖一即為磨輪機構在切削蝸桿時之示意圖。本研究之蝸桿蝸輪組其蝸輪則由飛刀所創成，其創成機構和原理將於後面再詳予說明之。

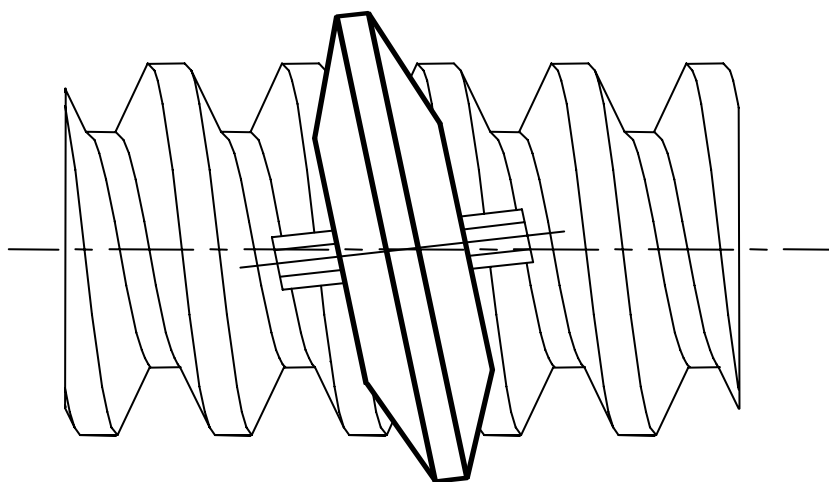


圖 1.1 磨輪磨削 ZK 型蝸桿示意圖



## 1.2 磨輪及滾刀參數設計及其幾何數學模式

如圖1.2所示，錐狀圓盤形磨輪是用來創成ZK型蝸桿之刀具，其磨輪截面之兩側則為錐型直邊刀具。其中，錐狀圓盤形磨輪之右刀具面用以磨削創成ZK型蝸桿之左齒面，而  $S_{gf}(X_{gf}, Y_{gf}, Z_{gf})$  座標系係固聯於磨輪直邊刀刃上之參考座標系， $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$  座標系則係固聯於磨輪之參考座標。直邊磨輪刀具之位置向量  $\mathbf{R}_{gf}$  及法向量  $\mathbf{n}_{gf}$  表示於  $S_{gf}$  座標系分別為：

$$\mathbf{R}_{gf} = \begin{bmatrix} u_1 \cos \alpha_n \\ 0 \\ \pm(b_1 - u_1 \sin \alpha_n) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

及

$$\mathbf{n}_{gf} = \begin{bmatrix} \pm \sin \alpha_n \\ 0 \\ \cos \alpha_n \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

其中， $u_1$  為直邊磨輪刀具之刀面設計參數，其中  $u_{min} \leq u_1 \leq u_{max}$ ， $\alpha_n$  為直邊磨輪刀具的法向壓力角。在方程式(1.1)至方程式(1.4)中，其“ $\pm$ ”符號之上方符號代表直邊磨輪之右側刀具面，下方符號則表示直邊磨輪之左側刀具面。此外，依據圖 1.2 所示之磨輪刀具面幾何關係，方程式(1.1)之刀具面位置向量其中之參數  $b_1$  可由下式求出：

$$b_1 = \frac{\pi m_a}{4} \cos \lambda + r_c \tan \alpha_n$$

其中， $m_a$  為直邊磨輪刀具之刀面的軸向模數(Axial Module)， $\alpha_n$  為直邊磨輪刀具面之法向壓力角， $\lambda$  為蝸桿齒面之導程角， $r_c$  為直邊磨輪刀具面之節圓半徑。直邊磨輪刀具面之位置向量及其法向量可利用齊次座標轉換矩陣(Homogeneous Coordinate Transformation Matrix)方法，由  $S_{gf}$  座標系轉換至磨輪  $S_c$  座標系，並分別表示如下：

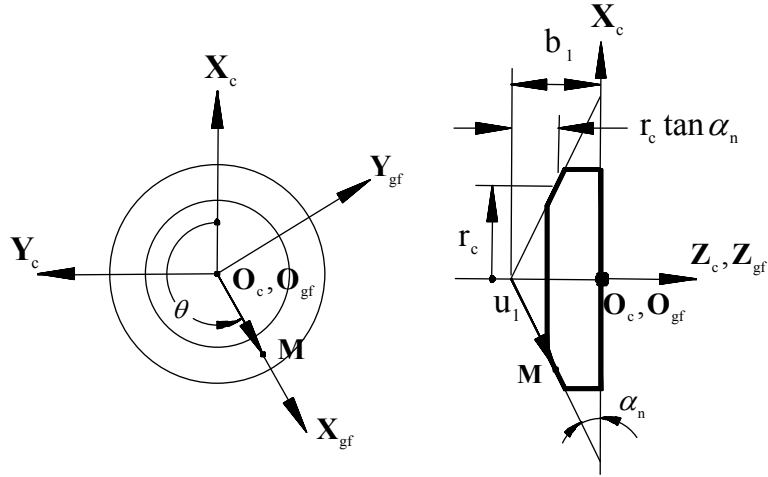
$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \cos \alpha_n \cos \theta \\ u_1 \cos \alpha_n \sin \theta \\ \pm(b_1 - u_1 \sin \alpha_n) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

及

$$\mathbf{n}_c = \begin{bmatrix} n_{xc} \\ n_{yc} \\ n_{zc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm \sin \alpha_n \cos \theta \\ \pm \sin \alpha_n \sin \theta \\ \cos \alpha_n \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

由方程式(1.3)可知，磨輪之外形參數為 $u_1$ 及 $\theta$ 。

左刀具面



右刀具面

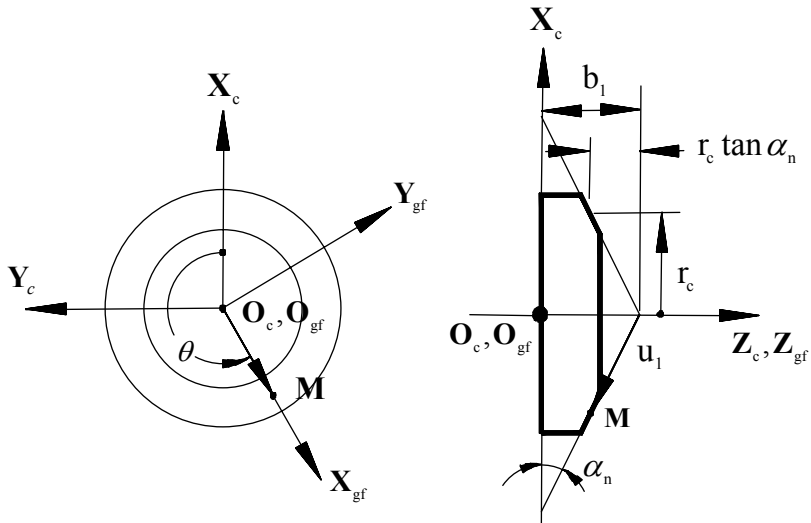


圖 1.2 磨輪刀具面設計及參數示意圖

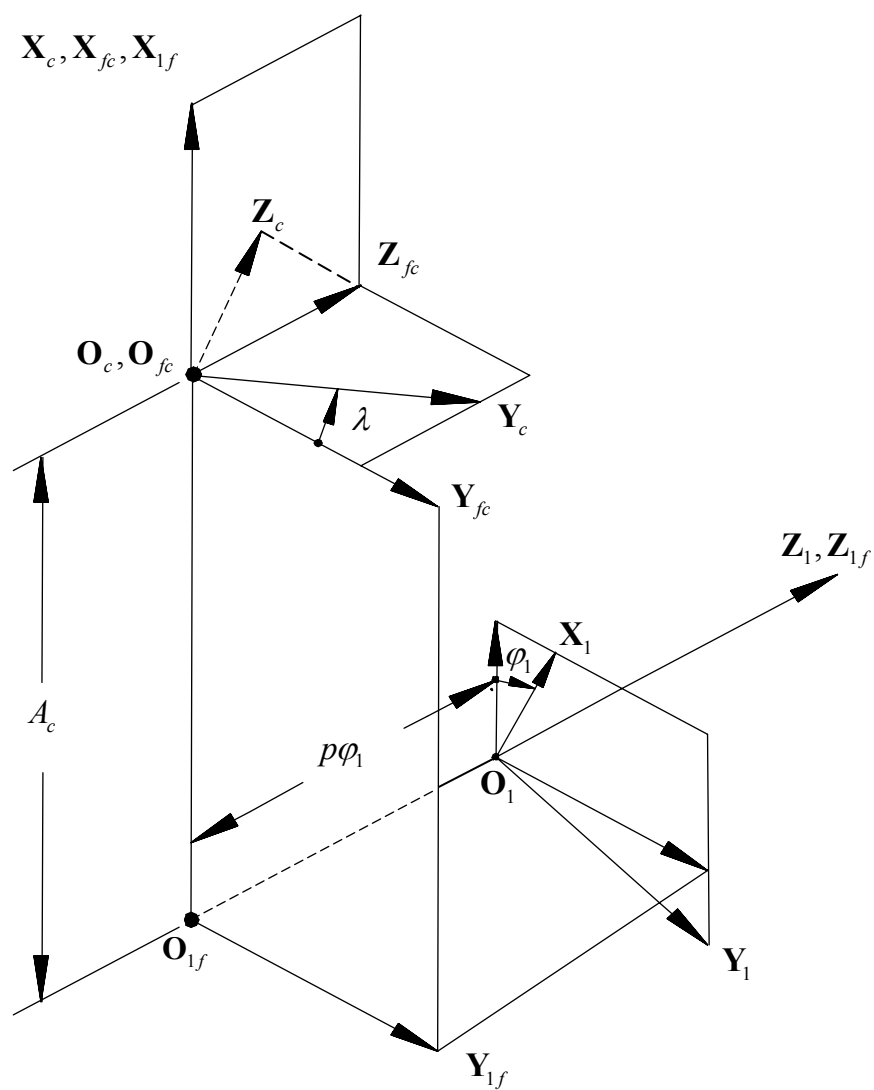


圖 1.3 磨輪刀具面磨削蝸桿齒面創成機構示意圖

由於 ZK 型蝸桿的磨削加工，可由蝸桿座標系與磨輪座標系之相對運動關係來模擬，此磨削機構的示意圖如圖 1.3 所示，其中  $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$  座標系為磨輪的座標系， $Z_c$  軸為磨輪之旋轉軸， $S_{fc}(X_{fc}, Y_{fc}, Z_{fc})$  座標系則為參考座標系， $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  座標系為蝸桿齒面之座標系，其中  $Z_1$  軸為蝸桿之旋轉軸。由圖 1.3 可知磨輪刀具旋轉軸與蝸桿之旋轉軸相夾一角度  $\lambda$ ，此角度即為 ZK 型蝸桿齒面之導程角。圖 1.3 所示之符號  $p_1$  代表蝸桿齒面之導程，為蝸桿作螺旋運動時，蝸桿每轉動一弧度(Radian)時蝸桿齒面上之點沿著蝸桿旋轉軸方向所移動的距離， $\varphi_1$  則為蝸桿做螺旋運動時之旋轉角。根據圖 1.3 之磨輪與蝸桿磨削模擬機構示意圖可瞭解各座標系間之關係，利用下列之齊次座標轉換矩陣方程式，即可推導磨輪右刀具面之軌跡方程式表示於蝸桿之  $S_1$  座標系如下：

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{M}_{1f} \mathbf{R}_c \quad (1.5)$$

其中  $\mathbf{R}_c$  表示於方程式(1.3)，而上式中各座標轉換矩陣則分別為：

$$\mathbf{M}_{1,c} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \cos\lambda & -\sin\varphi_1 \sin\lambda & A_c \cos\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \cos\lambda & -\cos\varphi_1 \sin\lambda & -A_c \sin\varphi_1 \\ 0 & \sin\lambda & \cos\lambda & -p\varphi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

將方程式(1.3)代入方程式(1.5)，即可求得磨輪刀具面表示於  $S_1$  座標系之軌跡方程式如下：

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_c \cos\varphi_1 + Y_c \sin\varphi_1 \cos\lambda - Z_c \sin\varphi_1 \sin\lambda + A_c \cos\varphi_1 \\ -X_c \sin\varphi_1 + Y_c \cos\varphi_1 \cos\lambda - Z_c \cos\varphi_1 \sin\lambda - A_c \sin\varphi_1 \\ Y_c \sin\lambda + Z_c \cos\lambda - p\varphi_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

其中， $X_c$ ， $Y_c$  及  $Z_c$  分別表示於方程式(1.3)。同理，利用下列之向量轉換矩陣方程式，即可將方程式(1.4)由  $S_c$  座標系轉換至  $S_1$  座標系，即可求得 ZK 型蝸桿型滾刀刀具面之法向量為：

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{L}_{1,fc} \mathbf{L}_{fc,c} \mathbf{n}_c \quad (1.7)$$

其中

$$\mathbf{L}_{fc,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \lambda & -\sin \lambda \\ 0 & \sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix}$$

$$\text{及 } \mathbf{L}_{1,fc} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

方程式(1.7)經運算並化簡後可得滾齒刀右刀具面之法向量為：

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{xc} \cos \varphi_1 + n_{yc} \sin \varphi_1 \cos \lambda - n_{zc} \sin \varphi_1 \sin \lambda + A_c \cos \varphi_1 \\ -n_{xc} \sin \varphi_1 + n_{yc} \cos \varphi_1 \cos \lambda - n_{zc} \cos \varphi_1 \sin \lambda - A_c \sin \varphi_1 \\ n_{yc} \sin \lambda + n_{zc} \cos \lambda - p\varphi_1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

其中  $n_{xc}$  ,  $n_{yc}$  及  $n_{zc}$  分別表示於方程式(1.4)。

由於在利用磨輪刀具來創成蝸桿的過程中，磨輪與蝸桿工件(Work Piece)間每一瞬間皆呈嚙合狀態，亦即磨輪與蝸桿工件兩者之齒面進行嚙合運動時，磨輪齒面與蝸桿齒面既不分離亦不衝撞進入對方之齒面內，因此，兩齒面之相對速度  $\mathbf{V}_c^{(1c)}$  在其共同法向量之方向分量為零，故其相對速度必落於共同切平面(Common Tangent Plane) 上，而共同法向量又與共切面互相垂直。因此，上述之嚙合條件用數學式來表示時，即為齒輪原理中所謂的嚙合方程式(Equation of Meshing)。假若磨輪與蝸桿工件表示於  $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$  座標系之相對速度為  $\mathbf{V}_c^{(1c)}$ ，而其相切點之共同法向量為  $\mathbf{n}_c^{(c)}$ ，由於磨輪在創成蝸桿時，兩者之相切點其相對速度  $\mathbf{V}_c^{(1c)}$  與共同法向量  $\mathbf{n}_c^{(c)}$  互相垂直，因此，蝸桿與磨輪之嚙合方程式可以下式求得：

$$\mathbf{n}_c^{(1c)} \cdot \mathbf{V}_c^{(1c)} = 0. \quad (1.9)$$

其中磨輪與蝸桿之相對速度可以用下式表示：

$$\mathbf{V}_c^{(1c)} = \mathbf{V}_c^{(1)} - \mathbf{V}_c^{(c)} \quad (1.10)$$

上式中  $\mathbf{V}_c^{(1)}$  及  $\mathbf{V}_c^{(c)}$  分別為蝸桿齒面及磨輪刀具面之速度表示於  $S_c$  座標系。在蝸桿之創成過程中，其磨輪與蝸桿座標系之關係如圖1.3所示。若假設磨輪固定在  $S_c$  座標系上不動，亦即磨輪之速度表示在  $S_c$  座標系  $\mathbf{V}_c^{(c)} = 0$ 。由磨輪與蝸桿間之相對運動關係得知，蝸桿相對於  $S_{fc}(X_{fc}, Y_{fc}, Z_{fc})$  座標系做螺旋運動，亦即相對於  $S_{fc}$  座標系之  $Z_{fc}$  軸，以角速度  $\boldsymbol{\omega}_{fc}^{(1)} = \omega_1 \mathbf{k}_{fc}$  做旋轉運動，並同時做線速度  $\mathbf{V}_{fc}^{(1)} = p\omega_1 \mathbf{k}_{fc}$  的平移運動。因此，將蝸桿齒面速度表示在  $S_c$  座標系上可以下式表示之：

$$\mathbf{V}_c^{(1)} = \boldsymbol{\omega}_c^{(1)} \times \mathbf{R}_c^{(c)} + \boldsymbol{\omega}_c^{(1)} \times \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_c^{(c)} + \mathbf{V}_c^{(tl)} \quad (1.11)$$

將方程式整理後可得：

$$\mathbf{V}_c^{(1)} = \omega_1 \begin{bmatrix} \pm(b_1 - u_1 \sin \alpha_n) \sin \lambda - u_1 \cos \alpha_n \sin \theta \cos \lambda \\ u \cos \alpha_1 \cos \theta \cos \lambda + p \sin \lambda + A_c \cos \lambda \\ -u \cos \alpha_1 \cos \theta \sin \lambda + p \cos \lambda - A_c \sin \lambda \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

由  $\mathbf{V}_c^{(c)} = 0$  及方程式(1.4)、(1.10)和(1.12)代入方程式(1.9)，經過化簡整理以後可得到磨輪刀具面與蝸桿齒面的嚙合方程式如下：

$$u_1 = b_1 \sin \alpha_n - (A_c - p \cot \lambda) \frac{\cos \alpha_n}{\cos \theta} \pm (A_c \cot \lambda + p) \sin \alpha_n \tan \theta \quad (1.13)$$

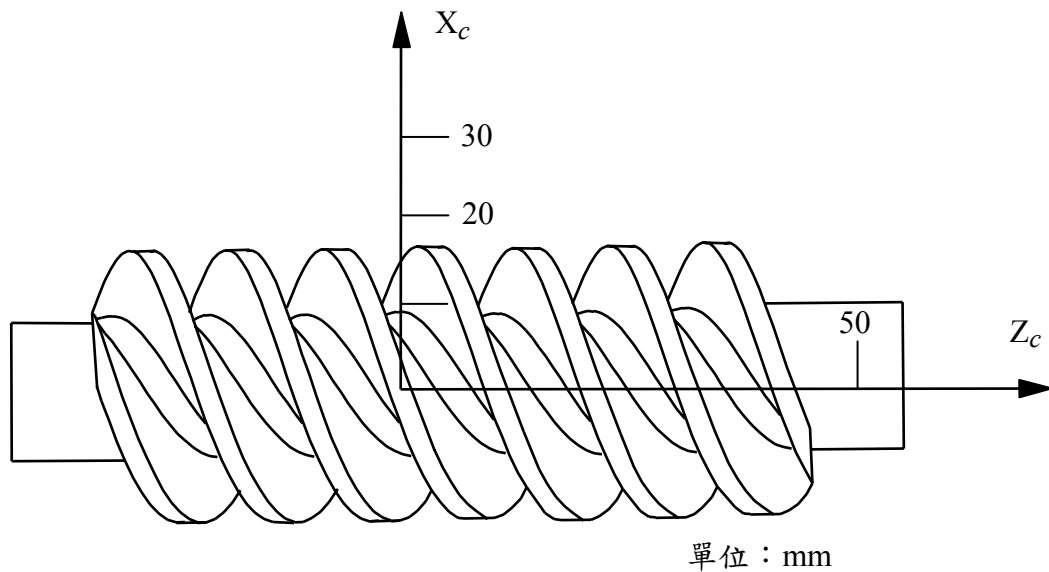
由於ZK型蝸桿之左齒面數學模式可由磨輪之右刀具面軌跡方程式及磨輪右刀具面和蝸桿左齒面之嚙合方程式聯立而得，亦即方程式(1.6)及(1.13)聯立即為ZK型蝸桿之齒面數學模式。其中“±”符號之上方符號代表直邊磨輪之右側刀具面所創成ZK型蝸桿左齒面之嚙合方程式，下方符號則表示直邊磨輪之左側刀具面所創成ZK型蝸桿右齒面之嚙合方程式。

藉由上述所推導之 ZK 型蝸桿之齒面軌跡方程式(1.6)和齒面嚙合方程式(1.13)，即可利用數值解方法求得其齒面之解析解，然後再應用電腦繪圖的方法繪出其相對之齒形。表 1.1 列出本研究所採用之 ZK 型蝸桿蝸輪組設計參數，並依據本章所推導之

ZK 型蝸桿齒面數學模式，利用電腦繪圖方法可將 ZK 型蝸桿三維外形繪圖表示於圖 1.4。

表 1.1 蝸桿與直邊磨輪之尺寸參數

設計參數名稱	設計參數值
蝸桿旋向	右旋
蝸桿齒數( $T_1$ )	3
磨輪法向壓力角( $\alpha_n$ )	$20^\circ$
磨輪導程角( $\lambda$ )	$30^\circ$
磨輪軸向模數( $m_a$ )	4.619 mm
磨輪節圓半徑( $r_c$ )	20.0 mm
蝸桿節圓半徑( $r_1$ )	12.0 mm
蝸桿單位角度之導程( $p$ )	6.928mm/rad
蝸桿與磨輪之中心距( $A_c$ )	32.0 mm



### 1.3 ZK 型蝸桿與飛刀創成蝸輪之數學模式

蝸輪之齒面一般是由蝸桿型滾刀來創成滾製而成，但是小量產製蝸輪時則多是以單齒之飛刀來代替蝸桿型滾刀。由於蝸桿型滾刀之法向剖面與飛刀之法向剖面之外形相同，如圖 1.5 所示。因此，飛刀法向外形之直邊刀面方程式可表示於  $S_l(X_l, Y_l, Z_l)$  座

標系中如下：

$$\mathbf{R}_l = \begin{bmatrix} X_l \\ Y_l \\ Z_l \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \cos \alpha \\ 0 \\ \pm (b_2 - u_2 \sin \alpha) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

其中

$$b_2 = \frac{S_n}{2} + r_l \tan \alpha \quad ; \quad S_n = S_a \cos \lambda$$

方程式(1.14)中之 $u_2$ 為飛刀之刀面設計參數，其中 $u_{min} \leq u_2 \leq u_{max}$ ， $\alpha$ 為飛刀直邊部分之法向壓力角。又方程式(1.14)中，其“ $\pm$ ”符號之上方符號代表飛刀之右邊刀具面，下方符號則表示飛刀之左邊刀具面。在以下有關蝸輪之齒面方程式的推導過程中，上方之符號皆代表由飛刀之右邊刀具面所創成之蝸輪左齒面，而下方之符號則表示由飛刀之左邊刀具面所創成之蝸輪右齒面。

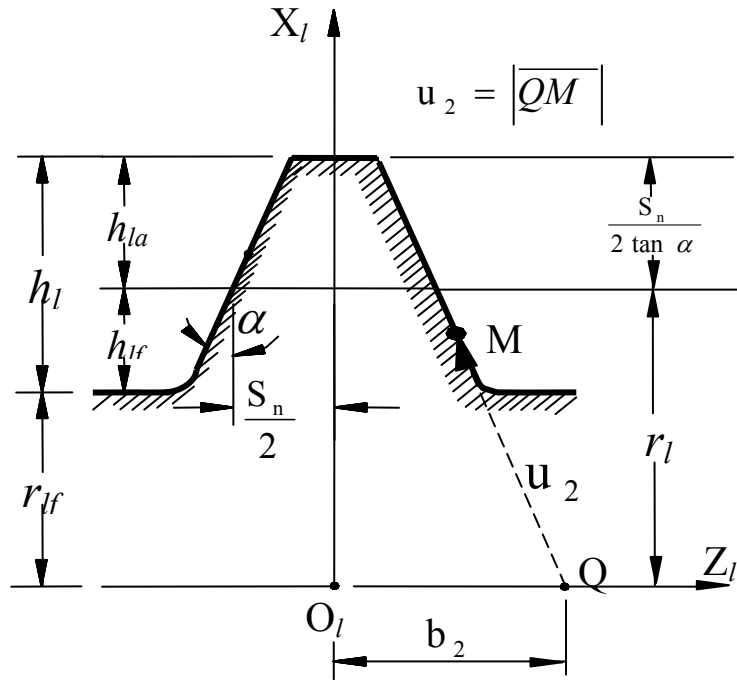


圖 1.5 飛刀之法向剖面示意圖

其中 $S_a$ 為蝸桿型滾刀之軸向齒厚， $S_n$ 為蝸桿型滾刀之法向齒厚。如圖 1.6 所示，蝸桿型滾刀座標系 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 是由固聯在 $S_l(X_l, Y_l, Z_l)$ 座標系之飛刀法向外形，與其滾刀旋轉軸 $Z_h$ 軸或其參考座標系 $S_{hf}(X_{hf}, Y_{hf}, Z_{hf})$ 之 $Z_{hf}$ 軸夾一導程角 $\lambda$ ，並相對於參考座



標系  $S_{hf}(X_{hf}, Y_{hf}, Z_{hf})$  之  $Z_{hf}$  軸做螺旋運動，如此則可得到蝸桿型滾刀之軌跡方程式。

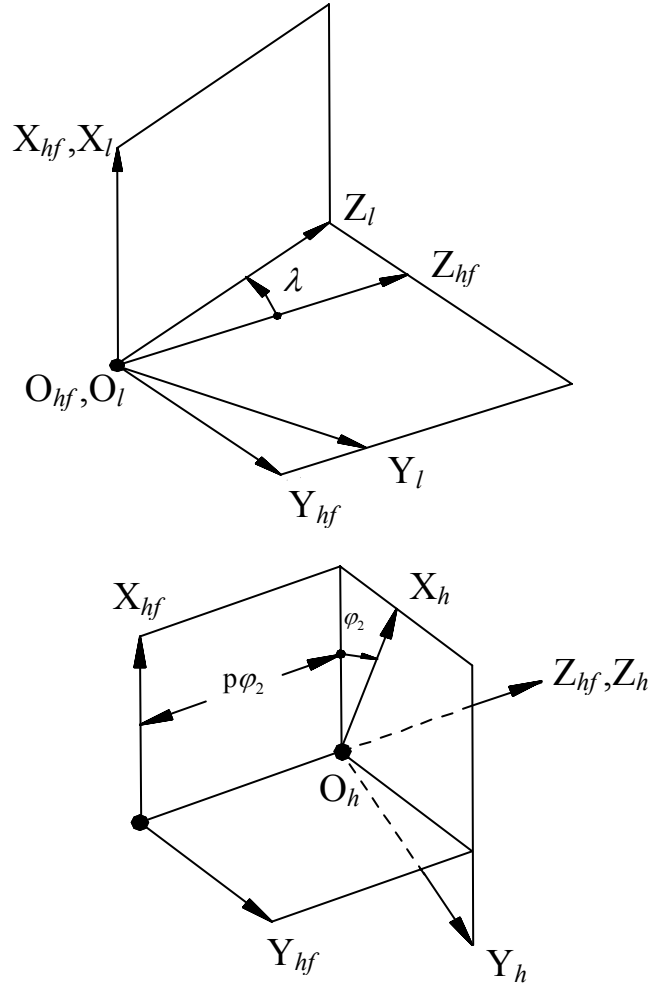


圖 1.6 蝸桿型滾刀之成形機構示意圖

由於蝸桿型滾刀是利用軌跡法所形成之，因此，蝸桿型滾刀之軌跡方程式，亦即為其齒面數學方程式。茲將飛刀法向外形方程式藉由下列座標轉換，即可得到蝸桿型滾刀之軌跡方程式如下：

$$\mathbf{R}_h = \mathbf{M}_{h,l} \mathbf{R}_l \quad (1.15)$$

其中  $\mathbf{R}_l$  表示於方程式(1.14)，而上式中座標轉換矩陣則為：

$$\mathbf{M}_{h,l} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \cos \lambda & -\sin \varphi_2 \sin \lambda & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \cos \lambda & -\cos \varphi_2 \sin \lambda & 0 \\ 0 & \sin \lambda & \cos \lambda & -p\varphi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

將方程式(1.14)代入方程式(1.15)，即可求得蝸桿型滾刀表示於 $S_h$ 座標系之軌跡方程式，亦即為蝸桿型滾刀之齒面方程式如下：

$$\mathbf{R}_h = \begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \\ Z_h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_l \cos \varphi_2 + Y_l \sin \varphi_2 \cos \lambda - Z_l \sin \varphi_2 \sin \lambda \\ -X_l \sin \varphi_2 + Y_l \cos \varphi_2 \cos \lambda - Z_l \cos \varphi_2 \sin \lambda \\ Y_l \sin \lambda + Z_l \cos \lambda - p \varphi_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

其中 $X_l$ 、 $Y_l$ 和 $Z_l$ 分別表示於方程式(1.14)中。

由於蝸桿型滾刀之齒面為一規則曲面，因此，可藉由對蝸桿之兩個齒面參數之偏微分的乘積(Cross Product)，求出其齒面之法向量如下：

$$\mathbf{N}_h = \frac{\partial \mathbf{R}_h}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{R}_h}{\partial \varphi_2} \quad (1.17)$$

蝸桿型滾刀表示在蝸輪座標系之軌跡方程式，如圖 1.7 和圖 1.8 所示，座標系

$S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 與 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 分別為固聯在蝸輪與蝸桿型滾刀之座標系，而座標系

$S_o(X_o, Y_o, Z_o)$ 和 $S_g(X_g, Y_g, Z_g)$ 則分別為蝸桿型滾刀與蝸輪之參考座標系， $Z_o$ 軸為蝸桿型

滾刀之旋轉軸， $Z_g$ 軸為蝸輪之旋轉軸， $\gamma$ 為蝸桿型滾刀之旋轉軸與蝸輪旋轉軸所夾之

交錯角(Crossed Angle)， $S = |\overline{O_g M}|$ 為此兩旋轉軸之最短距離。如圖 1.7(a)表示，固聯於

$S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 座標系之蝸輪相對於其參考座標系 $S_g(X_g, Y_g, Z_g)$ ，是沿著 $Z_2$ 旋轉軸方向以

$\phi_2$ 之角度作左旋方向旋轉；如圖 1.7(b)所示，固聯於 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 座標系之蝸桿型滾刀

相對於其參考座標系 $S_o(X_o, Y_o, Z_o)$ ，是沿著 $Z_o$ 軸方向以 $\phi_1$ 之角度作右旋方向旋轉。茲

將蝸桿型滾刀之軌跡方程式表示於 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 座標系中並以 $\mathbf{R}_2$ 表示之，而且已知 $\mathbf{R}_h$

為蝸桿型滾刀固聯在 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 座標系之位置向量，則 $\mathbf{R}_2$ 和 $\mathbf{R}_h$ 兩個位置向量之間

的座標轉換關係，可由下列之齊次座標轉換矩陣方程式求得：

$$\mathbf{R}_2(u_2, \varphi_2, \phi_1) = \mathbf{M}_{2,h} \mathbf{R}_h(u_2, \varphi_2) \quad (1.18)$$

其中，則

$$\mathbf{M}_{2,h} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \sin\phi_2 \sin\gamma & -S\cos\phi_2 \\ a_{21} & a_{22} & -\cos\phi_2 \sin\gamma & -S\sin\phi_2 \\ \sin\gamma \sin\phi_1 & \sin\gamma \cos\phi_1 & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

其中

$$a_{11} = -\sin\phi_2 \cos\gamma \sin\phi_1 + \cos\phi_2 \cos\phi_1$$

$$a_{12} = -\sin\phi_2 \cos\gamma \cos\phi_1 - \cos\phi_2 \sin\phi_1$$

$$a_{21} = \cos\phi_2 \cos\gamma \sin\phi_1 + \sin\phi_2 \sin\phi_1$$

$$a_{22} = \cos\phi_2 \cos\gamma \cos\phi_1 - \sin\phi_2 \sin\phi_1$$

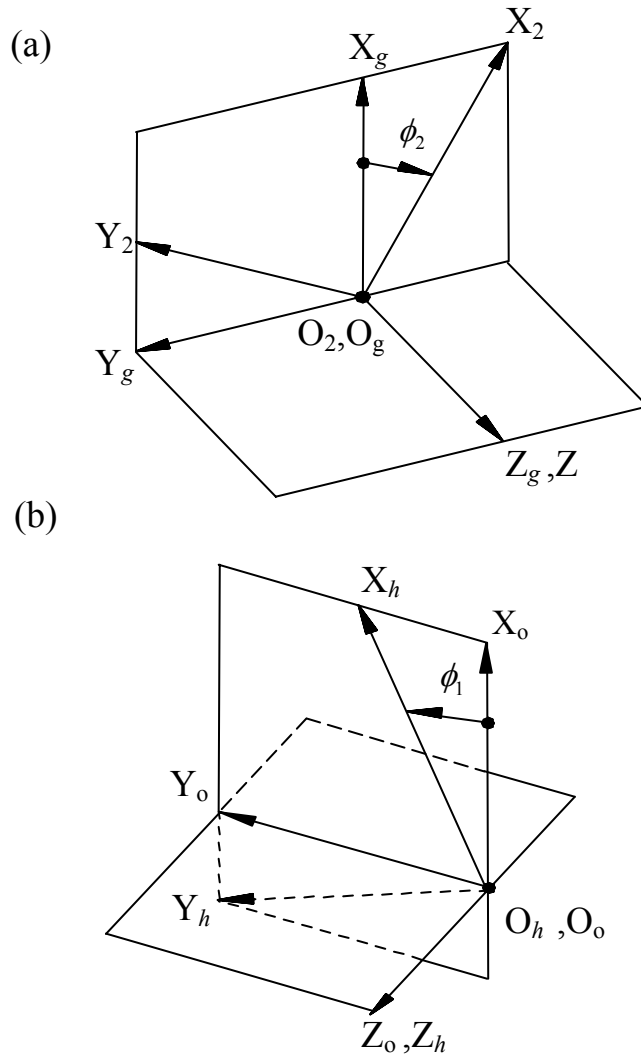


圖 1.7 蝸桿滾削機構示意圖

由於在小量或試驗切削蝸輪之過程中，蝸輪為飛刀之共軛運動對，但在蝸輪之量產時，則多是以蝸桿型滾刀來滾製。因此，蝸桿與蝸輪之旋轉角 $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 必滿足下列之關

係式：

$$\phi_2 = m_{2h} = \frac{|\omega_2|}{|\omega_h|} = \frac{T_h}{T_2} \phi_1 \quad (1.20)$$

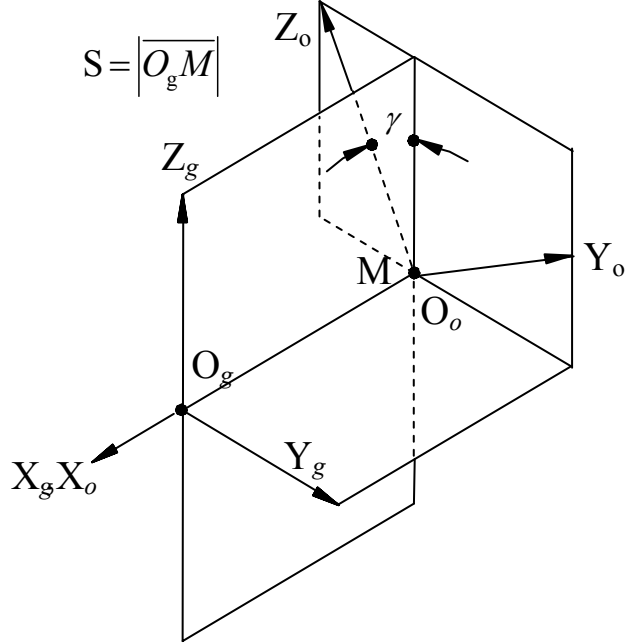


圖 1.8 蝸輪之滾削機構示意圖

其中  $T_h$  和  $T_2$  分別為蝸桿型滾刀之齒數與蝸輪之齒數，而  $\omega_h$  和  $\omega_2$  則分別為切削蝸輪時蝸桿型滾刀與蝸輪之轉速。因此，將方程式(1.16)與(1.19)代入方程式(1.18)，即可得蝸桿型滾刀表示於蝸輪座標系  $S_2$  之軌跡方程式，亦即為蝸輪之軌跡方程式表示如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2(u_2, \phi_2, \phi_1) &= \mathbf{M}_{2,h} \mathbf{R}_h(u_2, \phi_2) \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}X_h + a_{12}Y_h + \sin \gamma \sin \phi_2 Z_h - S \cos \phi_2 \\ a_{21}X_h + a_{22}Y_h - \sin \gamma \cos \phi_2 Z_h - S \sin \phi_2 \\ \sin \gamma \sin \phi_1 X_h + \sin \gamma \cos \phi_1 Y_h + \cos \gamma Z_h \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.21)$$

其中  $X_h$ 、 $Y_h$  和  $Z_h$  分別表示於方程式(1.16)中。

為求得蝸輪與蝸桿型滾刀的嚙合方程式，必須將蝸桿型滾刀刀具面與蝸輪齒面的相對速度以及滾刀之刀具面法向量表示在同一座標系。由圖 1.7 和圖 1.8 所示之蝸桿型滾刀與蝸輪工件之座標系關係，若要表示在  $S_h$  座標系，則必須先求得由座標系  $S_g(X_g, Y_g, Z_g)$  轉換至  $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ ，故將蝸桿型滾刀與蝸輪工件之相對速度表示在

$S_h(X_h, Y_h, Z_h)$  座標系，可由下式求得：

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{h2}^{(h)} &= (\boldsymbol{\omega}_h^{(h)} - \boldsymbol{\omega}_2^{(h)}) \times \mathbf{R}_h - \mathbf{O}_h \mathbf{O}_2^{(h)} \times \boldsymbol{\omega}_2^{(h)} \\ &= \begin{bmatrix} (m_{2h} \cos \phi_1 \sin \gamma) Z_h - (1 + m_{2h} \cos \gamma) Y_h - S m_{2h} \sin \phi_1 \cos \gamma \\ (1 + m_{2h} \cos \gamma) X_h - (m_{2h} \sin \phi_1 \sin \gamma) Z_h - S m_{2h} \cos \phi_1 \cos \gamma \\ (m_{2h} \sin \phi_1 \sin \gamma) Y_h - (m_{2h} \cos \phi_1 \sin \gamma) X_h + S m_{2h} \sin \gamma \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.22)$$

其中  $X_h$ 、 $Y_h$  和  $Z_h$  分別表示於方程式(1.16)中。

根據方程式(1.9)之嚙合條件式，將方程式(1.17)和(1.22)做內積，即可求得蝸桿型滾刀刀具面與蝸輪工件齒面的嚙合方程式，其表示如下：

$$\mathbf{N}_h^{(h)} \cdot \mathbf{V}_h^{(h2)} = 0 \quad (1.23)$$

因為蝸輪之齒面是由蝸桿型滾刀所創成，因此，蝸輪之齒面的數學模式可由蝸桿型滾刀在  $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$  座標系之軌跡方程式(1.21)，與上述之嚙合方程式(1.23)聯立組成。

藉由前面所推導蝸輪之齒面軌跡方程式(1.21)和蝸輪齒面嚙合方程式(1.23)，即可利用數值解之方法求得其齒面之解析解，然後再應用電腦繪圖的方法即可繪出其相對之齒形。表二 1.2 為本專題計畫所採用之蝸桿型滾刀與所創成之蝸輪的主要設計參數，並依據所推導之蝸輪齒面數學模式，配合電腦繪圖方法，即可將以蝸桿型滾刀所創成之蝸輪的三維外形繪圖表示於圖 1.9。

表 1.2 蝸桿型滾刀與蝸輪之尺寸參數

設計參數名稱	設計參數值
滾刀旋轉方向	右旋
蝸輪旋轉方向	左旋
蝸桿蝸輪組之交錯角( $\gamma$ )	45°
蝸輪之螺旋角( $\beta$ )	15°
蝸輪之節圓半徑( $r_2$ )	60.045 mm
中心距( $S$ )	72.045 mm
蝸輪齒數( $T_2$ )	29
滾刀齒數( $T_h$ )	3
滾刀法向壓力角( $\alpha$ )	20°
滾刀導程角( $\lambda$ )	30°
滾刀法向模數( $m$ )	4.0 mm
滾刀節圓半徑( $r_l$ )	12.0 mm
滾刀單位角度之導程( $p$ )	7.255mm/rad

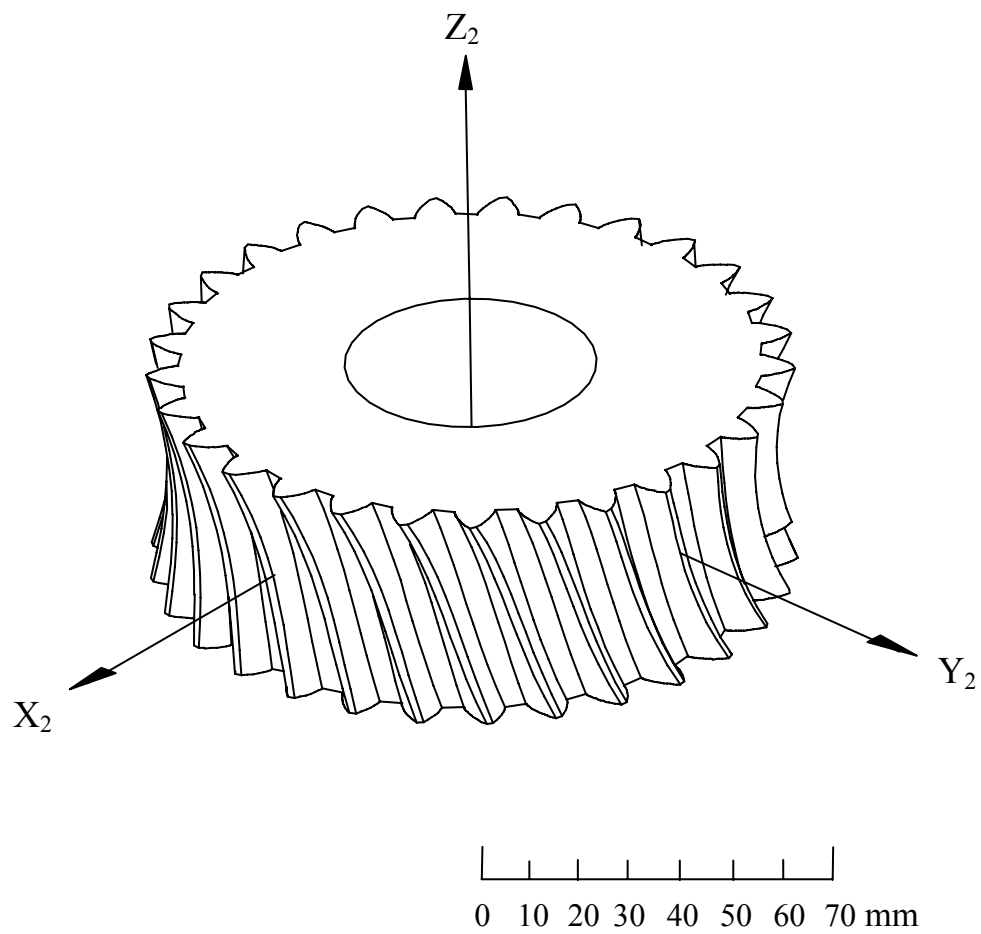


圖 1.9 蝸輪之電腦輔助繪圖

## 第二章 飛刀創成之蝸輪齒面之齒形過切分析

### 2.1 蝸輪齒面之齒形過切數學條件式

以下將應用 Litvin[8]所提出之齒形過切分析方法，分析蝸輪齒面之過切線分佈情形。由微分幾何之定義可知，若曲面上之一點，其切向量不存在或切向量大小等於零，則此點稱為奇異點。一般齒輪之齒面為規則曲面，即齒面上不會有奇異點存在，若齒面上出現奇異點，就表示齒面必然發生過切現象。若以蝸桿型滾刀刀面 $\Sigma_h$ 創成蝸輪之齒面 $\Sigma_2$ ，在齒面之創成過程中，蝸桿型滾刀之刀面 $\Sigma_h$ 與被創成之齒面 $\Sigma_2$ 的瞬時接觸點，其兩者的位置向量在任意一固定座標系觀察時，其位置向量應該要一致。將 $\Sigma_h$ 與 $\Sigma_2$ 於齒面上的瞬時接觸點表示在任意固定座標系 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ ，故下式必成立：

$$\mathbf{R}_h^{(h)} = \mathbf{R}_h^{(2)} \quad (2.1)$$

再將上式對時間微分可得

$$\mathbf{V}_{tr}^{(h)} + \mathbf{V}_r^{(h)} = \mathbf{V}_{tr}^{(2)} + \mathbf{V}_r^{(2)} \quad (2.2)$$

經移項整理後可得

$$\mathbf{V}_r^{(2)} = \mathbf{V}_{tr}^{(h)} + \mathbf{V}_r^{(h)} - \mathbf{V}_{tr}^{(2)} = \mathbf{V}_r^{(h)} + \mathbf{V}^{(h2)} \quad (2.3)$$

方程式(2.2)及(2.3)中之下標符號 $tr$ 是表示接觸點隨著蝸桿型滾刀或蝸輪齒面之運動速度，下標 $r$ 則表示接觸點沿蝸桿型滾刀或齒面之切平面方向的速度。從奇異點之定義可知，當 $\mathbf{V}_r^{(2)} = 0$ 時，齒面上將會產生奇異點，故蝸輪齒面就會發生過切現象，則齒面發生過切之必要條件可表示如下：

$$\mathbf{V}_r^{(h)} + \mathbf{V}^{(h2)} = 0 \quad (2.4)$$

茲將嚙合方程式對時間之微分，如下所示：

$$\frac{d}{dt} f(u_2, \phi_2, \phi_1) = 0 \quad (2.5)$$

方程式(2.4)配合上式即可在蝸桿型滾刀之刀面上定義出一限制曲線，而此限制曲線將是創成蝸輪齒面所形成齒形過切現象之過切線。當蝸桿型滾刀刀面上的點位於限制曲

線上或超過限制曲線，則這些刀面上之點將在齒面創成時造成齒面之過切。

由(2.4)式及(2.5)式可分別改寫成下列兩式：

$$\frac{\partial \mathbf{R}_h^{(h)}}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \frac{\partial \mathbf{R}_h^{(h)}}{\partial \phi_2} \frac{d\phi_2}{dt} = -\mathbf{V}_{h2}^{(h)} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \phi_2} \frac{d\phi_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial \phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \quad (2.7)$$

方程式(2.6)中之 $\mathbf{R}_h^{(h)}$ 表示刀面方程式表示於座標系 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ ， $\mathbf{V}_{h2}^{(h)}$ 則表示刀面 $\Sigma_h$ 上

的瞬間接觸點相對於齒面 $\Sigma_2$ 上的瞬間接觸點之相對速度。方程式(2.6)及(2.7)可以下列

矩陣方程式表示之：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial x_h^{(h)}}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial y_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial y_h^{(h)}}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial z_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial z_h^{(h)}}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial f}{\partial u_2} & \frac{\partial f}{\partial \phi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du_2}{dt} \\ \frac{d\phi_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{V}_{xh}^{(h2)} \\ -\mathbf{V}_{yh}^{(h2)} \\ -\mathbf{V}_{zh}^{(h2)} \\ -\frac{\partial f}{\partial \phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

方程式(2.8)存在的唯一解之必要充分條件為此(2.8)式之擴增矩陣(Augmented Matrix)

的秩(Rank)必須為二，而且也要同時滿足下列方程式。

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial x_h^{(h)}}{\partial \phi_2} & -\mathbf{V}_{xh}^{(h2)} \\ \frac{\partial y_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial y_h^{(h)}}{\partial \phi_2} & -\mathbf{V}_{yh}^{(h2)} \\ f_{u_2} & f_{\phi_2} & -f_{\phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.9)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial x_h^{(h)}}{\partial \phi_2} & -\mathbf{V}_{xh}^{(h2)} \\ \frac{\partial z_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial z_h^{(h)}}{\partial \phi_2} & -\mathbf{V}_{zh}^{(h2)} \\ f_{u_2} & f_{\phi_2} & -f_{\phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.10)$$



$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial y_h^{(h)}}{\partial \varphi_2} & -V_{yh}^{(h2)} \\ \frac{\partial z_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial z_h^{(h)}}{\partial \varphi_2} & -V_{zh}^{(h2)} \\ f_{u_2} & f_{\varphi_2} & -f_{\phi_l} \frac{d\phi_l}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial x_h^{(h)}}{\partial \varphi_2} & -V_{xh}^{(h2)} \\ \frac{\partial y_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial y_h^{(h)}}{\partial \varphi_2} & -V_{yh}^{(h2)} \\ \frac{\partial z_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial z_h^{(h)}}{\partial \varphi_2} & -V_{zh}^{(h2)} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

方程式(2.9)為嚙合方程式，綜合上述方程式(2.9)至(2.12)式，可求得齒面 $\Sigma_2$ 上奇異點之充分條件其包含三個未知數 $u_2$ ， $\varphi_2$ 和 $\phi_l$ 之下列兩式所組成之非線性方程組：

$$f(u_2, \varphi_2, \phi_l) = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = 0 \quad (2.13)$$

$$f(u_2, \varphi_2, \phi_l) = 0 \quad (2.14)$$

將方程式(2.13)及(2.14)兩式聯立，其中每式皆具有三個未知數，因此，求解方法可將 $\varphi_2$ 當作已知給定一數值來求解一組對應之 $u_2$ 和 $\phi_l$ ，然後逐次給予 $\varphi_2$ 一增量值，再解另一組對應之 $u_2$ 和 $\phi_l$ ，如此便可解出蝸桿滾刀刀具上創成蝸輪齒面奇異點的限制曲線。

## 2.2 飛刀創成蝸輪之範例

茲舉表 2.1 所列之蝸輪設計參數為例，依據上述方程式(2.13)及(2.14)兩式聯立，來求解探討蝸桿蝸輪組齒面過切之情形，在此例中將依據不同壓力角以及軸交角分別探討蝸輪齒面過切的現象，在蝸輪左右兩齒面於不同的設計參數下，當齒面中出現奇異點時，齒輪 Z 截面與齒面參數 $u_2$ 之關係。其中 $u_{2L}$ 表示蝸桿左齒面參數， $u_{2R}$ 表示右齒面參數，其左右齒面定義可參考圖 2.1，又蝸輪左右兩側齒面是相反對稱的，所以在齒面寬中間 Z=0 mm 截面，其齒面左右兩側奇異點發生點 $u_2$ 是對稱的，如表 2.2 至表 2.4 所示。接著討論設計參數於不同軸交角時，各種不同壓力角對齒面過切的變化。

表 2.1 蝸桿型滾刀與蝸輪之尺寸參數

設計參數名稱	設計參數值
滾刀旋轉方向	右旋
蝸輪旋轉方向	左旋
蝸桿蝸輪組之交錯角( $\gamma$ )	$45^\circ$
蝸輪之螺旋角( $\beta$ )	$15^\circ$
蝸輪之節圓半徑( $r_2$ )	60.045 mm
中心距( $S$ )	72.045 mm
蝸輪齒數( $T_2$ )	29
滾刀齒數( $T_h$ )	3
滾刀法向壓力角( $\alpha$ )	$20^\circ$
滾刀導程角( $\lambda$ )	$30^\circ$
滾刀法向模數( $m$ )	4.0 mm
滾刀節圓半徑( $r_l$ )	12.0 mm
滾刀單位角度之導程( $p$ )	7.255mm/rad

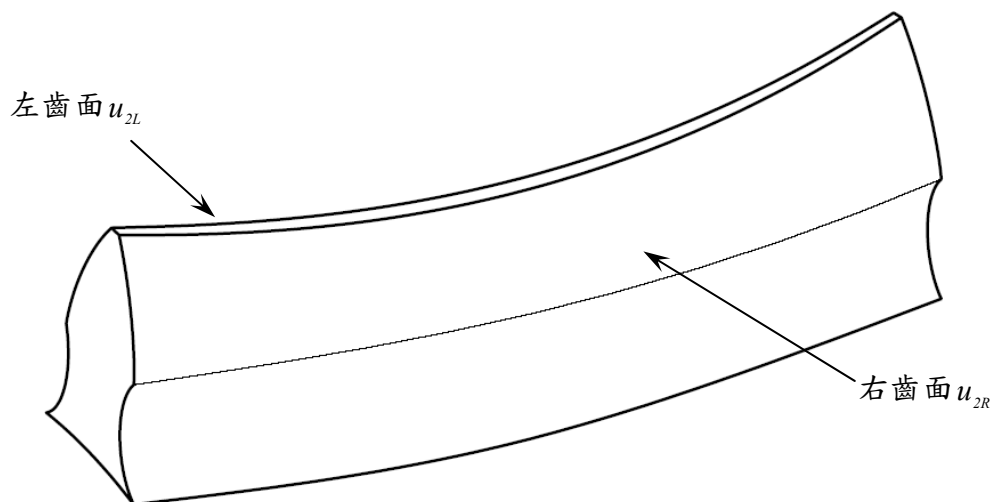


圖 2.1 齒面過切線之示意圖

若蝸輪之齒面設計參數值 $u_2$ 落於創成齒面之工作範圍內，則必將產生齒面過切現象，當壓力角為 $14.5^\circ$ 、 $20.0^\circ$ 、 $22.5^\circ$ 及 $25.0^\circ$ ，齒面之工作範圍分別為 $8.0\text{mm}\leq u_2\leq 17.593\text{mm}$ 、 $8.0\text{mm}\leq u_2\leq 18.09\text{mm}$ 、 $8.0\text{mm}\leq u_2\leq 18.887\text{mm}$ 以及 $8.0\text{mm}\leq u_2\leq 19.253\text{mm}$ 。首先以表 2.2(a)及(b)之分析結果為例，當蝸桿蝸輪組之軸交角為 $\gamma=45.0^\circ$ 時且在壓力角 $\alpha=14.5^\circ$ 下，可發現奇異點分佈皆在創成之蝸輪齒面參數 $u_2$ 範圍內，從 $13.858\sim 15.466\text{mm}$ ，故整個齒面必然發生過切，並且相較於其他壓力角來觀察，其差距範圍是最短的。在 $Z$ 截面=0mm 的位置 $u_2=13.858\text{mm}$ 時奇異點就出現；在壓力角 $\alpha=20.0^\circ$ 時，最大奇異點產生於 $17.575\text{mm}$ ，其過切現象相較於 $\alpha=14.5^\circ$ 時有較好的情形；在 $\alpha=22.5^\circ$ 下，最大奇異點為 $18.865\text{mm}$ ，已經與直邊最大工作範圍 $18.887\text{mm}$ 極為接近，故在齒面的兩側外緣( $Z$ 截面=25mm 或-25mm 時)，其過切的狀況已漸漸不明顯；最後當壓力角改為 $\alpha=25.0^\circ$ ，從表 2.2(b)中可知，在 $Z$ 截面等於 $20\text{mm}$ 或 $-20\text{mm}$ 時，其奇異點已落於直邊刀具最大之工作範圍外側，故已完全無過切現象的發生。因此，由上述探討結果可了解，若壓力角愈大時，齒面過切的現象愈不明顯。

表 2.2(a) 軸交角  $45.0^\circ$  時 $u_2$ 之變化(單位：mm)

參數 截面	$\alpha=14.5^\circ$ $\gamma=45.0^\circ$		$\alpha=20.0^\circ$ $\gamma=45.0^\circ$	
	$u_{2L}$	$u_{2R}$	$u_{2L}$	$u_{2R}$
-25.0	14.792	15.466	16.492	17.575
-20.0	14.433	14.920	16.099	16.872
-15.0	14.154	14.488	15.797	16.323
-10.0	13.961	14.169	15.592	15.919
-5.0	13.860	13.960	15.495	15.651
0.0	13.858	13.858	15.512	15.512
5.0	13.960	13.860	15.651	15.495
10.0	14.169	13.961	15.919	15.592
15.0	14.488	14.154	16.323	15.797
20.0	14.920	14.433	16.872	16.099
25.0	15.466	14.792	17.575	16.492

表 2.2(b) 軸交角  $45.0^\circ$  時  $u_2$  之變化(單位：mm)

<div> <div>參數</div> <div>截面</div> </div>	$\alpha = 22.5^\circ$ $\gamma = 45.0^\circ$		$\alpha = 25.0^\circ$ $\gamma = 45.0^\circ$	
	$u_{2L}$	$u_{2R}$	$u_{2L}$	$u_{2R}$
Z				
-25	17.520	18.865	18.744	20.420
-20	17.104	18.059	18.301	19.485
-15	16.786	17.435	17.965	18.766
-10	16.575	16.976	17.744	18.238
-5	16.479	16.670	17.650	17.886
0	16.507	16.507	17.694	17.694
5	16.670	16.479	17.886	17.650
10	16.976	16.575	18.238	17.744
15	17.435	16.786	18.766	17.965
20	18.059	17.104	19.485	18.301
25	18.865	17.520	20.420	18.744

如表四(a)及(b)所示，軸交角  $\gamma=30.0^\circ$  相較於表三(a)及(b)之  $\gamma=45.0^\circ$  時的奇異點，以 Z 截面=0 mm 及  $\alpha=20.0^\circ$  來看，在  $\gamma=30.0^\circ$  是  $u_2=13.252\text{mm}$  而  $\gamma=45.0^\circ$  是  $u_2=15.512\text{mm}$ ，很明顯的過切現象都提早發生，又於不同之 Z 截面其過切點的值都非常相近，其  $u_2$  全部落於 15.0~16.0mm 之間，再觀察表四(a)及(b)，在其他不同的壓力角， $u_2$  的範圍差異性皆不大。若將軸交角  $\gamma=60.0^\circ$  與  $\gamma=45.0^\circ$  且壓力角  $\alpha=20.0^\circ$  下來比較，如表五(a)及(b)所示，則創成齒面參數  $u_2$  之範圍從 16.654~22.592 mm，不同截面之奇異點位置其差異範圍變得很大，在 Z 截面為 15mm 或 -15mm 時，蝸輪之齒面已經開始不發生過切的現象，而 Z=0mm 之中央截面，不論在任何軸交角及齒形壓力角之下，蝸輪之齒面仍然有過切產生。依據上述之分析結果以及表三至表五觀察可知，軸交角與齒形壓力角愈大，則可以減少創成蝸輪齒面時過切的發生，因此，蝸輪齒面呈現左右相反對稱形態，故過切狀況亦是相似，由此亦可驗證本研究所推導之蝸桿蝸輪齒輪組之齒面數學模式及分析模式之正確性。

表 2.3(a) 軸交角  $30.0^\circ$  時  $u_2$  之變化(單位：mm)

<div> <div>參數</div> <div>截面</div> </div>	$\alpha = 14.5^\circ$ $\gamma = 30.0^\circ$		$\alpha = 20.0^\circ$ $\gamma = 30.0^\circ$	
	$u_{2L}$	$u_{2R}$	$u_{2L}$	$u_{2R}$
Z				
-25.0	12.078	12.254	13.474	13.751
-20.0	11.988	12.125	13.375	13.591
-15.0	11.921	12.022	13.302	13.461
-10.0	11.877	11.944	13.257	13.362
-5.0	11.857	11.890	13.240	13.292
0.0	11.861	11.861	13.252	13.252
5.0	11.890	11.857	13.292	13.240
10.0	11.944	11.877	13.362	13.257
15.0	12.022	11.921	13.461	13.302
20.0	12.125	11.988	13.591	13.375
25.0	12.254	12.078	13.751	13.474

表 2.3(b) 軸交角  $30.0^\circ$  時  $u_2$  之變化(單位：mm)

<div> <div>參數</div> <div>截面</div> </div>	$\alpha = 22.5^\circ$ $\gamma = 30.0^\circ$		$\alpha = 25.0^\circ$ $\gamma = 30.0^\circ$	
	$u_{2L}$	$u_{2R}$	$u_{2L}$	$u_{2R}$
Z				
-25	14.311	14.656	15.307	15.739
-20	14.206	14.474	15.195	15.531
-15	14.130	14.327	15.115	15.361
-10	14.085	14.214	15.068	15.230
-5	14.069	14.133	15.056	15.135
0	14.085	14.085	15.078	15.078
5	14.133	14.069	15.135	15.056
10	14.214	14.085	15.230	15.068
15	14.327	14.130	15.361	15.115
20	14.474	14.206	15.531	15.195
25	14.656	14.311	15.739	15.307

表五(a) 軸交角  $60.0^\circ$  時  $u_2$  之變化(單位：mm)

截面 \ 參數	$\alpha = 14.5^\circ$ $\gamma = 60.0^\circ$		$\alpha = 20.0^\circ$ $\gamma = 60.0^\circ$	
	$u_{2L}$	$u_{2R}$	$u_{2L}$	$u_{2R}$
Z				
-25.0	18.220	19.952	20.142	22.592
-20.0	17.130	18.094	18.995	20.362
-15.0	16.213	16.688	18.028	18.701
-10.0	15.506	15.700	17.280	17.557
-5.0	15.056	15.114	16.804	16.888
0.0	14.910	14.910	16.654	16.654
5.0	15.114	15.056	16.888	16.804
10.0	15.700	15.506	17.557	17.280
15.0	16.688	16.213	18.701	18.028
20.0	18.094	17.130	20.362	18.995
25.0	19.952	18.220	22.592	20.142

表五(b) 軸交角  $60.0^\circ$  時  $u_2$  之變化(單位：mm)

截面 \ 參數	$\alpha = 22.5^\circ$ $\gamma = 60.0^\circ$		$\alpha = 25.0^\circ$ $\gamma = 60.0^\circ$	
	$u_{2L}$	$u_{2R}$	$u_{2L}$	$u_{2R}$
Z				
-25	21.308	24.090	22.691	25.786
-20	20.120	21.684	21.453	23.214
-15	19.118	19.893	20.410	21.289
-10	18.345	18.664	19.605	19.971
-5	17.851	17.950	19.092	19.206
0	17.699	17.699	18.936	18.936
5	17.950	17.851	19.206	19.092
10	18.664	18.345	19.971	19.605
15	19.893	19.118	21.289	20.410
20	21.684	20.120	23.214	21.453
25	24.090	21.308	25.786	22.691

### 第三章 飛刀創成之蝸輪與 ZK 型蝸桿之接觸分析

#### 3.1 齒面接觸分析之數學模式

在進行蝸桿蝸輪組之齒面接觸分析時，首先需將蝸桿及蝸輪之齒面數學方程式及其齒面單位法向量，表示在同一個座標系上再加以分析。如圖 3.1 所示，依據蝸桿蝸輪組嚙合機構之示意圖，座標系  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  與座標系  $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$  分別固聯在 ZK 型蝸桿齒面與由飛刀所創成之蝸輪齒面上，其中， $Z_1$  軸為 ZK 型蝸桿之旋轉軸，而  $Z_2$  軸為蝸輪之旋轉軸。座標系  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$  為固定座標系，而座標系  $S_{fv}(X_{fv}, Y_{fv}, Z_{fv})$  和  $S_{fw}(X_{fw}, Y_{fw}, Z_{fw})$  則分別為具有垂直軸向與水平軸向之組裝偏差下，相對於  $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$  與  $S_{f2}(X_{f2}, Y_{f2}, Z_{f2})$  之參考座標系。參數  $\gamma$  為蝸桿與蝸輪嚙合時之交錯角， $S$  為蝸桿蝸輪組之中心距，其中  $\Delta\gamma_h$ 、 $\Delta\gamma_v$  和  $A_1$  分別為蝸桿蝸輪組之水平軸向裝配誤差、垂直軸向裝配誤差與中心距裝配誤差。利用下列齊次座標轉換矩陣方程式 (Homogeneous Coordinate Transformation Matrix Equation) 及向量矩陣轉換方程式，可將蝸桿齒面方程式及其單位法向量轉換至固定座標系  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ ，如下所示：

$$\mathbf{R}_f^{(1)} = [\mathbf{M}_{f,1}] \mathbf{R}_1 \quad (3.1)$$

及

$$\mathbf{n}_f^{(1)} = [\mathbf{L}_{f,1}] \mathbf{n}_1 \quad (3.2)$$

其中

$$[\mathbf{M}_{f,1}] = \begin{bmatrix} \cos \phi'_1 & -\sin \phi'_1 & 0 & 0 \\ \sin \phi'_1 & \cos \phi'_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{L}_{f,1}] = \begin{bmatrix} \cos \phi'_1 & -\sin \phi'_1 & 0 \\ \sin \phi'_1 & \cos \phi'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，ZK 型蝸桿之齒面方程式表示在  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$  座標系中為：

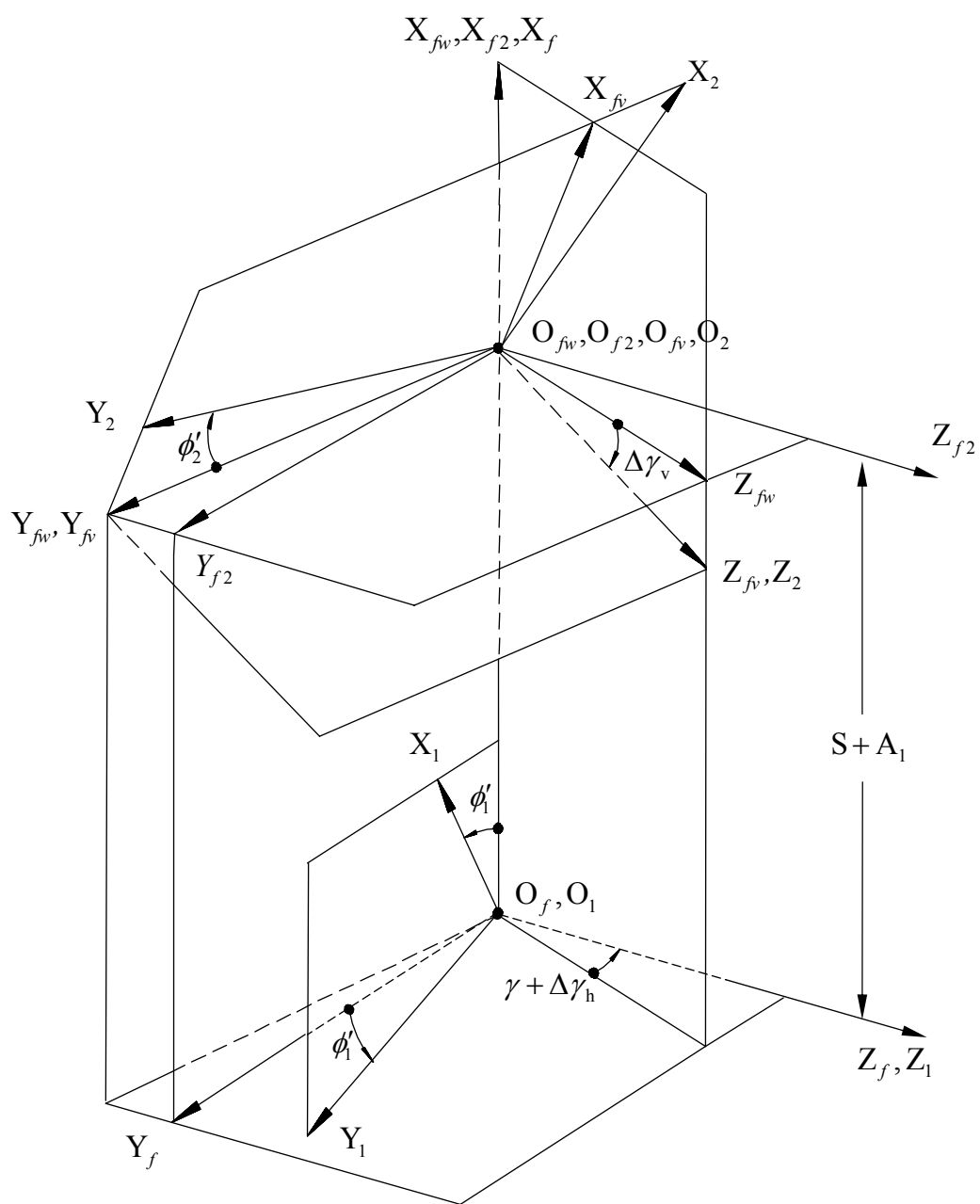


圖 3.1 蝸桿蝸輪組嚙合機構示意圖



$$\mathbf{R}_f^{(1)} = \begin{bmatrix} X_1 \cos \phi'_1 - Y_1 \sin \phi'_1 \\ X_1 \sin \phi'_1 + Y_1 \cos \phi'_1 \\ Z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

其中  $X_1$ 、 $Y_1$  和  $Z_1$  則分別表示為磨輪刀具面表示於  $S_1$  座標系之軌跡方程式(1.6)。方程式(3.3)與下列之蝸桿與磨輪間嚙合方程式聯立，即為 ZK 型蝸桿之齒面方程式表示於  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$  座標系。

$$u_1 = b_1 \sin \alpha_n - (A_c - p \cot \lambda) \frac{\cos \alpha_n}{\cos \theta} \pm (A_c \cot \lambda + p) \sin \alpha_n \tan \theta \quad (3.4)$$

又 ZK 型蝸桿之單位法向量方程式表示在固定座標系  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$  中為：

$$\mathbf{n}_f^{(1)} = \begin{bmatrix} n_{x1} \cos \phi'_1 - n_{y1} \sin \phi'_1 \\ n_{x1} \sin \phi'_1 + n_{y1} \cos \phi'_1 \\ n_{z1} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

其中  $n_{x1}$ 、 $n_{y1}$  及  $n_{z1}$  為滾刀之刀具面之法向量表示於方程式(1.8)中。同理，利用下列齊次座標轉換矩陣方程式及向量轉換矩陣方程式，可將蝸輪之齒面方程式及其單位法向量轉換至固定座標系  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$  如下：

$$\mathbf{R}_f^{(2)} = [\mathbf{M}_{f,f2}] [\mathbf{M}_{f2,fw}] [\mathbf{M}_{fw,fv}] [\mathbf{M}_{fv,2}] \mathbf{R}_2 = [\mathbf{M}_{f,2}] \mathbf{R}_2 \quad (3.6)$$

及

$$\mathbf{n}_f^{(2)} = [\mathbf{L}_{f,f2}] [\mathbf{L}_{f2,fw}] [\mathbf{L}_{fw,fv}] [\mathbf{L}_{fv,2}] \mathbf{n}_2 = [\mathbf{L}_{f,2}] \mathbf{n}_2 \quad (3.7)$$

其中

$$[\mathbf{M}_{f,f2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{M}_{f2,fw}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma + \Delta\gamma_h) & \sin(\gamma + \Delta\gamma_h) & 0 \\ 0 & -\sin(\gamma + \Delta\gamma_h) & \cos(\gamma + \Delta\gamma_h) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{M}_{f^w, f^v}] = \begin{bmatrix} \cos \Delta \gamma_v & 0 & -\sin \Delta \gamma_v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \Delta \gamma_v & 0 & \cos \Delta \gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{M}_{f^v, 2}] = \begin{bmatrix} \cos \phi'_2 & \sin \phi'_2 & 0 & 0 \\ -\sin \phi'_2 & \cos \phi'_2 & 0 & 0 \\ 0_v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$[\mathbf{M}_{f, 2}] = \begin{bmatrix} \cos \Delta \gamma_v \cos \phi'_2 & \cos \Delta \gamma_v \sin \phi'_2 & -\sin \Delta \gamma_v & S+A_1 \\ b_{21} & b_{22} & \sin(\gamma+\Delta \gamma_h) \cos \Delta \gamma_v & 0 \\ b_{31} & b_{32} & \cos(\gamma+\Delta \gamma_h) \cos \Delta \gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{L}_{f, 2}] = \begin{bmatrix} \cos \Delta \gamma_v \cos \phi'_2 & \cos \Delta \gamma_v \sin \phi'_2 & -\sin \Delta \gamma_v \\ b_{21} & b_{22} & \sin(\gamma+\Delta \gamma_h) \cos \Delta \gamma_v \\ b_{31} & b_{32} & \cos(\gamma+\Delta \gamma_h) \cos \Delta \gamma_v \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} b_{21} &= \sin(\gamma+\Delta \gamma_h) \sin \Delta \gamma_v \cos \phi'_2 - \cos(\gamma+\Delta \gamma_h) \sin \phi'_2 \\ b_{22} &= \sin(\gamma+\Delta \gamma_h) \sin \Delta \gamma_v \sin \phi'_2 + \cos(\gamma+\Delta \gamma_h) \cos \phi'_2 \\ b_{31} &= \cos(\gamma+\Delta \gamma_h) \sin \Delta \gamma_v \cos \phi'_2 + \sin(\gamma+\Delta \gamma_h) \sin \phi'_2 \\ b_{32} &= \cos(\gamma+\Delta \gamma_h) \sin \Delta \gamma_v \sin \phi'_2 - \sin(\gamma+\Delta \gamma_h) \cos \phi'_2 \end{aligned}$$

因此，若將蝸輪之軌跡方程式  $\mathbf{R}_2$  (1.21) 代入方程式(3.6)，即可求得蝸輪之齒面軌跡方

程式表示在  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$  座標系如下：

$$\mathbf{R}_f^{(2)} = \begin{bmatrix} X_2 \cos \Delta \gamma_v \cos \phi'_2 + Y_2 \cos \Delta \gamma_v \sin \phi'_2 - Z_2 \sin \Delta \gamma_v + (S+A_1) \\ b_{21}X_2 + b_{22}Y_2 + Z_2 \sin(\gamma+\Delta \gamma_h) \cos \Delta \gamma_v \\ b_{31}X_2 + b_{32}Y_2 + Z_2 \cos(\gamma+\Delta \gamma_h) \cos \Delta \gamma_v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

其中  $X_2$ 、 $Y_2$  和  $Z_2$  則分別表示蝸輪之軌跡方程式(1.21)中。方程式(3.8)與下列嚙合方

程式聯立即為蝸輪之齒面方程式表示於  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$  座標系。

$$\mathbf{N}_h \cdot \mathbf{V}_{h2} = 0 \quad (3.9)$$

同理，將蝸輪之齒面單位法向量  $\mathbf{n}_2$  代入方程式(3.7)，即可求得蝸輪之齒面單位

法向量方程式表示在  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$  座標系如下：

$$\mathbf{n}_f^{(2)} = \begin{bmatrix} n_{x2} \cos \Delta\gamma_v \cos \phi'_2 + n_{y2} \cos \Delta\gamma_v \sin \phi'_2 - n_{z2} \sin \Delta\gamma_v \\ b_{21}n_{x2} + b_{22}n_{y2} + n_{z2} \sin(\gamma + \Delta\gamma_h) \cos \Delta\gamma_v \\ b_{31}n_{x2} + b_{32}n_{y2} + n_{z2} \cos(\gamma + \Delta\gamma_h) \cos \Delta\gamma_v \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

其中  $n_{x2}$ 、 $n_{y2}$  和  $n_{z2}$  則分別表示為蝸輪之齒面法向量，表示於  $S_2$  座標系之三個軸向的分量。

### 3.2 運動誤差與接觸比

蝸桿蝸輪組在進行嚙合傳動時，蝸桿齒面  $\Sigma_1$  和蝸輪齒面  $\Sigma_2$  需滿足相切之條件，亦即兩嚙合齒面之瞬間接觸點  $M$ ，必落在蝸桿與蝸輪齒面之切平面上，如圖 3.2 所示。因此，蝸桿與蝸輪之位置向量在固定座標系  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$  中必須相同，且兩者之齒面單位法向量必共線，因此必須滿足下列方程式：

$$\mathbf{R}_f^{(1)} - \mathbf{R}_f^{(2)} = 0 \quad (3.11)$$

及

$$\mathbf{n}_f^{(1)} \times \mathbf{n}_f^{(2)} = 0 \quad (3.12)$$

方程式(3.11)表示 ZK 型蝸桿與蝸輪在其共同接觸點處，兩者之齒面位置向量相等。因此，ZK 型蝸桿與蝸輪齒面個別之  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  軸之分量相等，亦即可成立三個等式。方程式(3.12)則表示 ZK 型蝸桿與蝸輪在其共同接觸點之齒面單位法向量共線，亦即兩個齒面單位法向量之外積等於零，但方程式(3.12)僅有兩個獨立方程式，因為單位法向量的長度為 1(即  $|\mathbf{n}_f^{(1)}| = |\mathbf{n}_f^{(2)}| = 1$ )。此外，在利用磨輪來創成蝸桿以及使用飛刀創成蝸輪時，會有兩個嚙合方程式存在，所以在進行蝸桿蝸輪組之齒面接觸分析時，實際上共有七個獨立方程式來求解八個未知數。因此，在發展電腦輔助齒面接觸分析模擬程式時，需根據前述三個位置向量之分量等式、兩個齒面單位法向量之分量等式及

兩個嚙合方程式等七個獨立方程式，來求解八個未知數： $u_1$ 、 $\theta$ 、 $\phi_1$ 、 $u_2$ 、 $\phi_2$ 、 $\phi_1'$ 和 $\phi_2'$ 。其中 $\theta$ 與 $\phi_1$ 表示磨輪創成蝸桿時磨輪之齒面設計參數； $u_2$ 、 $\phi_2$ 與 $\phi_1$ 則表示飛刀在創成蝸輪時，飛刀之刀面參數與創成機構之運動參數。利用嚙合方程式，則參數 $u_1$ 可表示成 $\theta$ 的顯函數， $u_2$ 、 $\phi_2$ 與 $\phi_1$ 則為隱函數型式，參數 $\phi_1'$ 為蝸桿蝸輪組在齒輪接觸分析時蝸桿之旋轉角，參數 $\phi_2'$ 則為蝸桿蝸輪組在齒輪接觸分析時之齒輪之旋轉角。

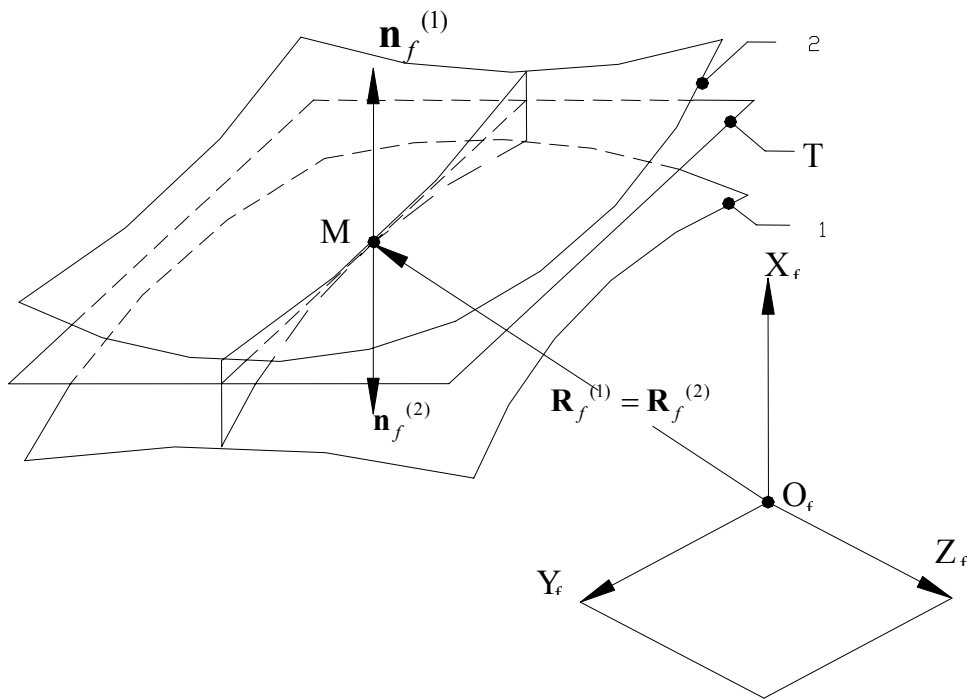


圖 3.2 兩曲面之嚙合關係圖

蝸桿蝸輪組一般以蝸桿為主動件而蝸輪為被動件，因此將蝸桿旋轉角 $\phi_1'$ 設為已知，如此一來，蝸桿蝸輪組之齒面接觸分析即成為七個方程式來求解七個未知數，而此七個非線性方程式可使用數值分析法來求解。在求得蝸桿蝸輪組之接觸點以及其運動參數後，蝸桿蝸輪組嚙合時之運動誤差則可由下式求得：

$$\Delta\phi_2 = \phi_2' - \frac{T_1}{T_2} \phi_1' \quad (3.13)$$

其中 $T_1$ 和 $T_2$ 分別為 ZK 型蝸桿與蝸輪之齒數， $\phi_1'$ 與 $\phi_2'$ 則分別為 ZK 型蝸桿和蝸輪在嚙合時之旋轉角度。此外， $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 為蝸桿及蝸輪之旋轉角度，其關係必須滿足下列方程

式：

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = m_{2h} = \frac{|\omega_2|}{|\omega_h|} \quad (3.14)$$

其中  $\omega_h$  及  $\omega_2$  分別為蝸桿與蝸輪之旋轉角速度。齒輪組之接觸比一般可定義為兩齒面從開始接觸至最後離開接觸，相對於齒輪中心所包括的作用角，除以相鄰兩齒相對應點的夾角，但實際上，齒輪組真正嚙合時的接觸比則不容易求得。若是再細分接觸比的種類與定義，還可有瞬時接觸齒數比和平均接觸比。瞬時接觸齒數則定義為齒輪組在進行嚙合的瞬間，兩個齒輪實際上所接觸的齒數；平均接觸比則定義為在齒輪組之作用線上各接觸取樣點(Sampling Points)，從開始接觸點瞬時之接觸齒數至最後接觸點之瞬時接觸齒數的總合，除以蝸桿蝸輪嚙合傳動一循環開始接觸點至最後接觸點的總取樣接觸點數。

一般正齒輪、螺旋齒輪、蝸線傘齒輪和戟齒輪的瞬時接觸齒數不是一齒就是兩齒。因此，在計算齒輪組之接觸比時，可利用齒輪接觸分析所獲得之運動誤差曲線來推算齒輪組之瞬時接觸齒數，亦即在齒輪組進行嚙合傳動時，若有兩個運動誤差曲線所包圍，此時瞬時接觸齒數為二，否則即為一齒。但是蝸桿蝸輪組瞬時接觸齒數可能是兩齒、三齒或四齒，其接觸齒數變動之範圍大，無法使用運動誤差曲線來判斷蝸桿蝸輪組瞬時接觸齒數。因此，在本研究中，利用電腦輔助齒輪接觸分析程式，計算蝸桿蝸輪組在開始發生接觸時之蝸桿旋轉角  $\phi_{1S}$ ，以及兩者結束接觸時之蝸桿旋轉角  $\phi_{1E}$ ，將兩者之差值除以蝸桿旋轉一圈之角度，再乘以蝸桿之齒數  $T_1$ ，即可求得蝸桿蝸輪組之接觸比 CR，如下列公式所示：

$$CR = \left( \frac{\phi_{1E} - \phi_{1S}}{360^\circ} \right) T_1 \quad (3.15)$$

以下即依據上述所建立之接觸分析數學模式，利用電腦輔助模擬程式的運算，求得在給定條件下蝸桿蝸輪組之運動誤差與接觸比。

### 3.3 蝸桿蝸輪組之接觸模擬

本專題研究計畫已發展出電腦輔助齒面接觸分析軟體，並利用此軟體來分析蝸桿蝸輪組之接觸情形。以下將試舉二個例子，分別探討在不同之齒形參數與裝配條件下，蝸桿蝸輪組之運動誤差與接觸比之變化情形。蝸桿蝸輪組之主要設計參數，如表 3.1 所示。

表 3.1 蝸桿蝸輪組之主要設計參數

	蝸桿			蝸輪
法向模數 $m$ (mm/teeth)	4.0	4.0	4.0	4.0
齒數	3	3	3	29
法向壓力角 $\alpha_n$	20°	22.5°	25°	20°
交錯角 $\gamma$	45°			

#### 範例 1

茲以 ZK 型蝸桿與由飛刀所創成之蝸輪互相配對嚙合，探討齒面法向壓力角分別為 20°、22.5°及 25°之 ZK 型蝸桿與 20°齒面法向壓力角之蝸輪嚙合，其蝸桿蝸輪組在軸交角為 45°且理想裝配狀況下之運動誤差(KE)、接觸點軌跡與接觸比(CR)。

經電腦模擬分析後，其接觸情形如表 3.2、3.3 及 3.4 所示。圖 3.3 表示不同之齒面法向壓力角之 ZK 型蝸桿與 20°齒面法向壓力角之蝸輪兩者嚙合時，其瞬時接觸點表示在蝸輪齒面上的軌跡。圖 3.4 表示同為 20°齒面法向壓力角之 ZK 型蝸桿蝸輪兩者嚙合時，其瞬時接觸點表示在蝸輪齒面上的軌跡之放大示意圖。經由分析之結果顯示，20°齒面法向壓力角之蝸桿與蝸輪在理想裝配的條件下(亦即無裝配誤差)嚙合，其接觸點的軌跡皆是落在非真實的蝸輪齒面上，亦即落在所謂的過切區域中，如圖 3.3 與圖 3.4 所示。由於此狀況並不會發生在真實的嚙合中，因此需透過調整蝸桿蝸輪組之齒形參數，使兩齒面之接觸點同時落在蝸桿齒面與蝸輪之真實齒面上。因此，若改變 ZK 型蝸桿創成時之法向壓力角為 22.5°或是 25°時，則蝸桿蝸輪組之接觸點及其軌跡會落在蝸輪齒面上，如圖 3.3 所示。

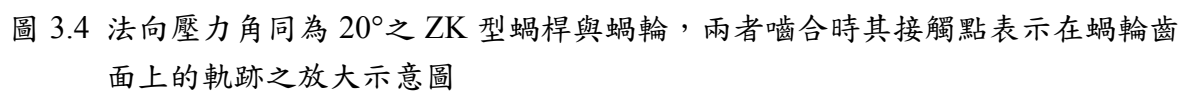
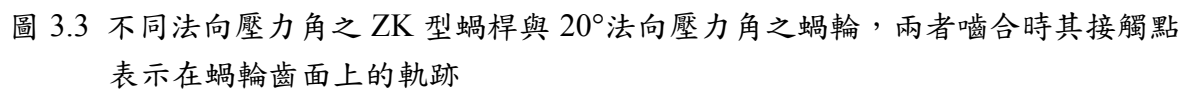


表 3.2 理想裝配狀況下齒面法向壓力角  $20^\circ$  之蝸桿與  $20^\circ$  蝸輪之接觸情形

$\phi'_1$ (deg.)	$\phi'_2$ (deg.)	$\theta$ (deg.)	$\phi_1$ (deg.)	$u_2$ (mm)	$\phi_2$ (deg.)	$\phi_1$ (deg.)	KE(arc-sec.)	CR
-196.0	-20.27	166.48	-230.51	16.80	-290.38	-254.69	0.0	3.76
-160.0	-16.55	166.48	-194.07	16.80	-253.94	-218.69	0.0	
-120.0	-12.41	166.48	-153.49	16.80	-213.36	-178.69	0.0	
-80.0	-8.27	166.48	-112.78	16.80	-172.66	-138.69	0.0	
-40.0	-4.13	166.48	-71.91	16.80	-131.79	-98.69	0.0	
0.0	0.00	166.48	-30.81	16.80	-90.68	-58.69	0.0	
40.0	4.13	166.48	10.61	16.80	-49.25	-18.69	0.0	
80.0	8.27	166.48	52.50	16.80	-7.37	21.30	0.0	
120.0	12.41	166.48	95.06	16.80	35.18	61.30	0.0	
160.0	16.55	166.48	138.56	16.80	78.69	101.30	0.0	
200.0	20.68	166.48	183.35	16.80	123.48	141.30	0.0	

表 3.3 理想裝配狀況下齒面法向壓力角  $22.5^\circ$  之蝸桿與  $20^\circ$  蝸輪之接觸情形

$\phi'_1$ (deg.)	$\phi'_2$ (deg.)	$\theta$ (deg.)	$\phi_1$ (deg.)	$u_2$ (mm)	$\phi_2$ (deg.)	$\phi_1$ (deg.)	KE(arc-sec.)	CR
-196.0	-20.27	174.67	-219.42	14.08	-264.84	-246.40	0.0	3.77
-160.0	-16.55	174.67	-181.95	14.08	-227.36	-210.40	0.0	
-120.0	-12.41	174.67	-140.05	14.08	-185.46	-170.40	0.0	
-80.0	-8.27	174.67	-97.82	14.08	-143.23	-130.40	0.0	
-40.0	-4.13	174.67	-55.18	14.08	-100.59	-90.40	0.0	
0.0	0.00	174.67	-12.07	14.08	-57.48	-50.40	0.0	
40.0	4.13	174.67	31.60	14.08	-13.80	-10.40	0.0	
80.0	8.27	174.67	75.90	14.08	30.49	29.59	0.0	
120.0	12.41	174.67	120.85	14.08	75.44	69.59	0.0	
160.0	16.55	174.67	166.43	14.08	121.02	109.59	0.0	
200.0	20.68	174.67	212.53	14.08	167.12	149.59	0.0	

表 3.4 理想裝配狀況下齒面法向壓力角  $25^\circ$  之蝸桿與  $20^\circ$  蝸輪之接觸情形

$\phi'_1$ (deg.)	$\phi'_2$ (deg.)	$\theta$ (deg.)	$\phi_1$ (deg.)	$u_2$ (mm)	$\phi_2$ (deg.)	$\phi_1$ (deg.)	KE(arc-sec.)	CR
-200.0	-20.68	179.49	-216.58	12.43	-247.78	-240.81	0.0	3.85
-160.0	-16.55	179.49	-174.26	12.43	-205.46	-200.81	0.0	
-120.0	-12.41	179.49	-131.60	12.43	-162.81	-160.81	0.0	
-80.0	-8.27	179.49	-88.56	12.43	-119.76	-120.81	0.0	
-40.0	-4.13	179.49	-45.08	12.43	-76.28	-80.81	0.0	
0.0	0.00	179.49	-1.13	12.43	-32.33	-40.81	0.0	
40.0	4.13	179.49	43.29	12.43	12.09	-0.81	0.0	
80.0	8.27	179.49	88.20	12.43	57.00	39.18	0.0	
120.0	12.41	179.49	133.52	12.43	102.32	79.18	0.0	
160.0	16.55	179.49	179.15	12.43	147.95	119.18	0.0	
200.0	20.68	179.49	224.96	12.43	193.76	159.18	0.0	



## 範例 2

茲以 ZK 型蝸桿與由飛刀所創成之蝸輪互相配對嚙合，探討齒面法向壓力角為  $22.5^\circ$  之 ZK 型蝸桿與齒面法向壓力角為  $20^\circ$  之蝸輪，其蝸桿蝸輪組在交錯角為  $45^\circ$  且具裝配誤差狀況下之運動誤差與接觸比。

經電腦模擬分析後，此蝸桿蝸輪組之接觸情形如表 3.5 至表 3.7 與圖 3.5 至圖 3.7 所示。經由分析之結果顯示，蝸桿蝸輪組之運動誤差與接觸比，在具有裝配誤差之狀況下進行嚙合傳動時，會造成蝸桿蝸輪組在傳動時之運動誤差，由表 3.5 至表 3.7 之數據顯示，蝸桿蝸輪組在垂直方向之軸向裝配誤差  $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$  相較於中心距裝配誤差  $A_1 = 0.2\text{ mm}$  或水平軸向裝配誤差  $\Delta\gamma_h = 0.1$  時，所造成的運動誤差值為最小，又其接觸比 3.86 則為最大，故對於裝配誤差來說，垂直軸向所產生的誤差相較於其他兩種誤差之影響較輕。當然圖 3.5 至圖 3.7 的運動誤差曲線是愈趨近於水平直線是愈理想。然而，不同裝配誤差的組合，亦會影響蝸桿蝸輪組之運動誤差的消長。由於蝸桿蝸輪組之接觸比為 3.8 以上，圖 3.5 至圖 3.7 所顯示之運動誤差將因多齒接觸而不會有齒輪組傳動時有跳動的現象發生。

表 3.5 中心距誤差  $A_1 = 0.2\text{ mm}$  蝸桿蝸輪組之接觸情形

$\phi'_1(\text{deg.})$	$\phi'_2(\text{deg.})$	$\theta(\text{deg.})$	$\phi_1(\text{deg.})$	$u_2(\text{mm})$	$\phi_2(\text{deg.})$	$\phi_1(\text{deg.})$	KE(arc-sec.)	CR
-189.0	-19.53	173.53	-213.54	14.36	-262.54	-242.44	1.22	3.8
-160.0	-16.53	173.46	-183.53	14.38	-232.70	-213.58	1.08	
-120.0	-12.39	173.37	-141.95	14.40	-191.38	-173.80	0.86	
-80.0	-8.26	173.26	-100.11	14.43	-149.81	-134.02	0.61	
-40.0	-4.13	173.15	-57.96	14.47	-107.93	-94.25	0.33	
0.0	0.00	173.03	-15.40	14.50	-65.64	-54.48	0.00	
40.0	4.13	172.92	27.65	14.54	-22.81	-14.67	-0.38	
80.0	8.26	172.83	71.33	14.57	20.71	25.19	-0.82	
120.0	12.39	172.78	115.79	14.59	65.15	65.17	-1.30	
160.0	16.52	172.80	161.15	14.59	110.70	105.30	-1.83	
200.0	20.65	172.91	207.45	14.56	157.41	145.62	-2.36	

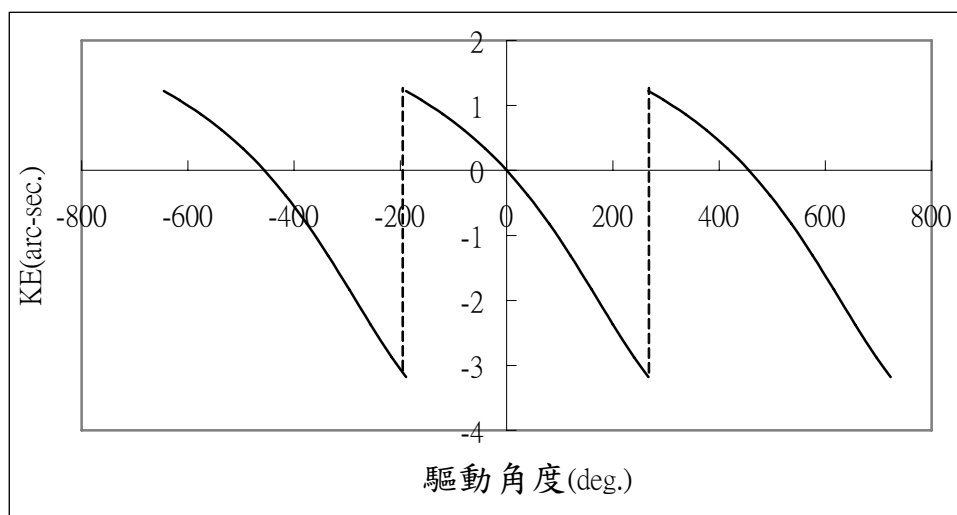


圖 3.5 中心距誤差  $A_1 = 0.2 \text{ mm}$  蝸桿蝸輪組之運動誤差

表 6 垂直軸向誤差  $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$  蝸桿蝸輪組之接觸情形

$\phi'_1$ (deg.)	$\phi'_2$ (deg.)	$\theta$ (deg.)	$\phi_1$ (deg.)	$u_2$ (mm)	$\phi_2$ (deg.)	$\phi_1$ (deg.)	KE(arc-sec.)	CR
-198.0	-20.47	174.98	-221.17	14.03	-266.53	-248.38	0.53	3.86
-160.0	-16.54	174.93	-181.66	14.04	-227.18	-210.51	0.47	
-120.0	-12.40	174.87	-139.84	14.06	-185.55	-170.67	0.39	
-80.0	-8.27	174.80	-97.73	14.08	-143.66	-130.86	0.29	
-40.0	-4.13	174.71	-55.27	14.10	-101.48	-91.10	0.16	
0.0	0.00	174.60	-12.41	14.13	-58.95	-51.37	0.00	
40.0	4.13	174.47	30.90	14.17	-16.01	-11.68	-0.21	
80.0	8.26	174.32	74.74	14.21	27.41	27.96	-0.49	
120.0	12.40	174.17	119.15	14.26	71.40	67.59	-0.84	
160.0	16.53	174.01	164.16	14.30	116.00	107.24	-1.28	
200.0	20.66	173.88	209.77	14.35	161.28	146.94	-1.80	

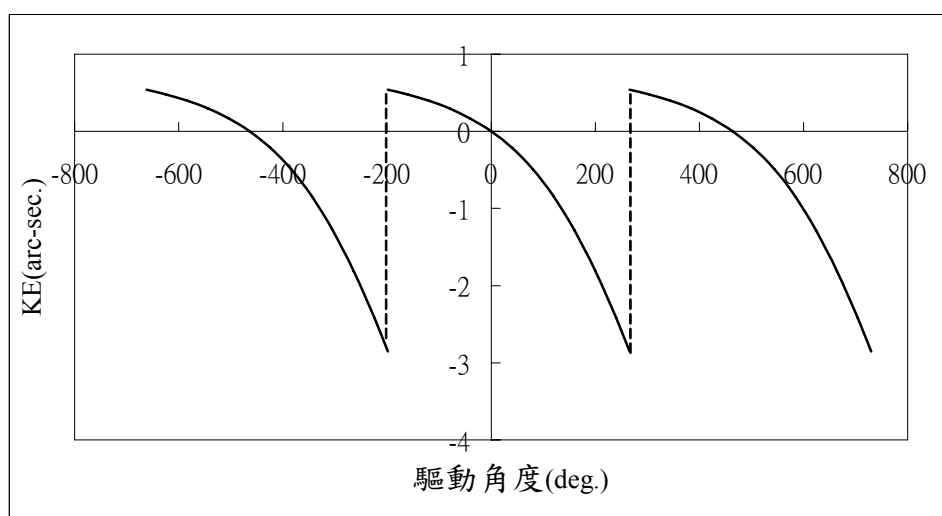


圖 3.6 垂直軸向誤差  $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$  蝸桿蝸輪組之運動誤差

表 7 水平軸向誤差  $\Delta\gamma_h = 0.1^\circ$  蝸桿蝸輪組之接觸情形

$\phi'_1$ (deg.)	$\phi'_2$ (deg.)	$\theta$ (deg.)	$\varphi_1$ (deg.)	$u_2$ (mm)	$\varphi_2$ (deg.)	$\phi_1$ (deg.)	KE(arc-sec.)	CR
-200.0	-20.71	174.88	-223.03	13.98	-267.78	-249.93	-1.88	3.81
-160.0	-16.57	174.91	-181.29	13.97	-225.95	-209.84	-1.51	
-120.0	-12.43	174.95	-139.27	13.96	-183.84	-169.75	-1.14	
-80.0	-8.28	174.98	-96.91	13.95	-141.40	-129.66	-0.76	
-40.0	-4.14	175.01	-54.14	13.95	-98.57	-89.60	-0.38	
0.0	0.00	175.03	-10.90	13.94	-55.30	-49.56	0.00	
40.0	4.14	175.02	32.84	13.95	-11.57	-9.56	0.38	
80.0	8.28	175.00	77.15	13.96	32.64	30.38	0.75	
120.0	12.43	174.94	122.01	13.98	77.33	70.27	1.09	
160.0	16.57	174.86	167.35	14.00	122.42	110.09	1.40	
200.0	20.71	174.75	213.08	14.04	167.84	149.85	1.65	

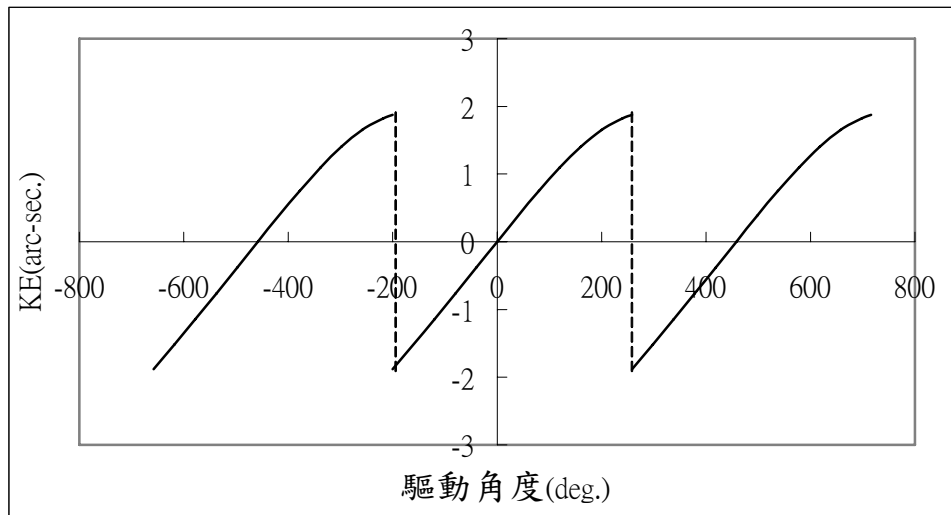


圖 3.7 水平軸向誤差  $\Delta\gamma_h = 0.1^\circ$  蝸桿蝸輪組之運動誤差

## 第四章 飛刀創成之蝸輪與 ZK 型蝸桿之接觸齒印分析

本專題研究計畫討論之 ZK 型蝸桿與飛刀創成之蝸輪屬於非對偶創成之齒輪對，理論上齒輪之齒面在嚙合傳動時呈現點接觸，此現象也由第三章之齒輪接觸分析結果獲得印證。然而，一對齒輪在嚙合時因齒面承受負荷，將使得齒面在其接觸點的附近產生彈性變形，因此，兩齒面的接觸會從理論上的點接觸變成一個區域的接觸，這樣的接觸變形區域稱為接觸齒印（Contact Pattern）。通常這個接觸區域的形狀相當接近橢圓形，因此又稱為接觸橢圓（Contact Ellipse）。齒輪之接觸齒印可以用電腦數值模擬或是由實驗量測的方式求得。

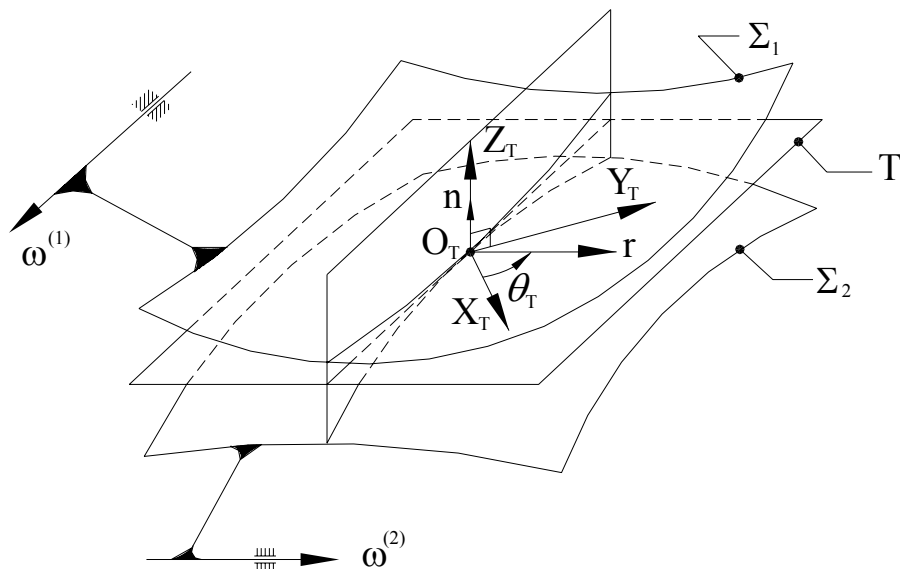
### 4.1 齒面外形法

實驗上量測接觸齒印可以用齒印量測儀來進行量測，其方法是在被量測的齒輪對之其中一個齒輪的齒面上塗抹上一層紅丹後，放置於齒印量測儀上進行嚙合運轉，齒輪之齒面因負載而產生彈性變形的接觸區域內之紅丹，就會被刮除並轉印到另一個齒輪之齒面上而形成接觸齒印。至於本研究之齒面接觸齒印的電腦數值模擬方式，則係採用 Janninck [15] 所提出之接觸齒面外形(Contact Surface Topology)法(以下簡稱齒面外形法)，此法係將齒輪之齒面視為不變形的剛體，並將接觸點附近兩齒面間距小於紅丹顆粒大小（約為 0.00632mm）之齒面區域，因嚙合時紅丹顆粒將會兩齒面之接觸而轉印造成脫落或被刮落，此被刮落的區域可視為齒面因受力變形後所產生接觸的區域，即為接觸齒印。相較而言，齒面外形法較簡單而且不需推導繁雜的齒面曲率與主軸方向之關係式，可以電腦數值計算與模擬的方式快速求得近似的接觸齒印。

齒面外形法其原理如圖 4.1(a)所示，其中  $O_T$  為兩齒面  $\Sigma_1$  及  $\Sigma_2$  之瞬時接觸點， $n$  為兩齒面在接觸點  $O_T$  之共同單位法向量， $T$  為兩齒面之共同切平面(Tangent Plane)。在此定義座標系  $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$  為接觸點座標系，其座標系原點與兩齒面之瞬時接觸點  $O_T$  重合， $Z_T$  軸選定為與兩齒面接觸點共同法向量  $n$  同方向，因此  $X_T - Y_T$  平面必為兩齒面之切平面。齒面外形法主要是模擬齒輪對在嚙合時，在接觸點附近的紅丹顆粒

將因齒面間距小於紅丹顆粒而被刮除，此刮除的區域即形成接觸齒印。因此，使用數值模擬來計算接觸點附近齒面間距時，齒面間距小於紅丹顆粒大小的區域即為接觸齒印。

(a)



(b)

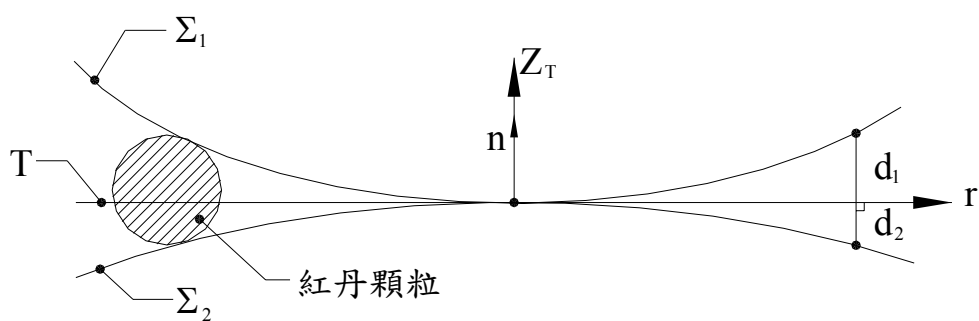


圖 4.1 嚙合齒面與其切平面關係圖

齒面外形法的實際做法是將兩嚙合的齒輪之齒面方程式，利用座標轉換至兩齒輪嚙合齒面之共同切平面座標系  $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$  上，再沿著與  $X_T$  軸夾一  $\theta_T$  角之  $r$  方向，如圖 4.1(a)所示，計算兩齒面之間的距離。圖 4.1(b)為固定一個  $\theta_T$  角而沿著  $r$  方向之截面圖，由該圖可知，若將兩齒面方程式轉換至切平面座標系  $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$  之

後，齒面到切平面的距離等於在 $Z_T$ 軸的分量大小，因此，兩齒面在 $Z_T$ 軸之分量兩者相減之絕對值即為兩齒面之間的距離。當計算所得之間距等於紅丹顆粒大小( $6.32\mu\text{m}$ )時，此點正是齒印輪廓上的一點，故予以紀錄此點之極座標值( $r, \theta_T$ )，接著再改變一個 $\theta_T$ 值重複進行上述步驟，即可求得齒印輪廓上其他的相對應點，而這些點的集合即是接觸齒印的外形。

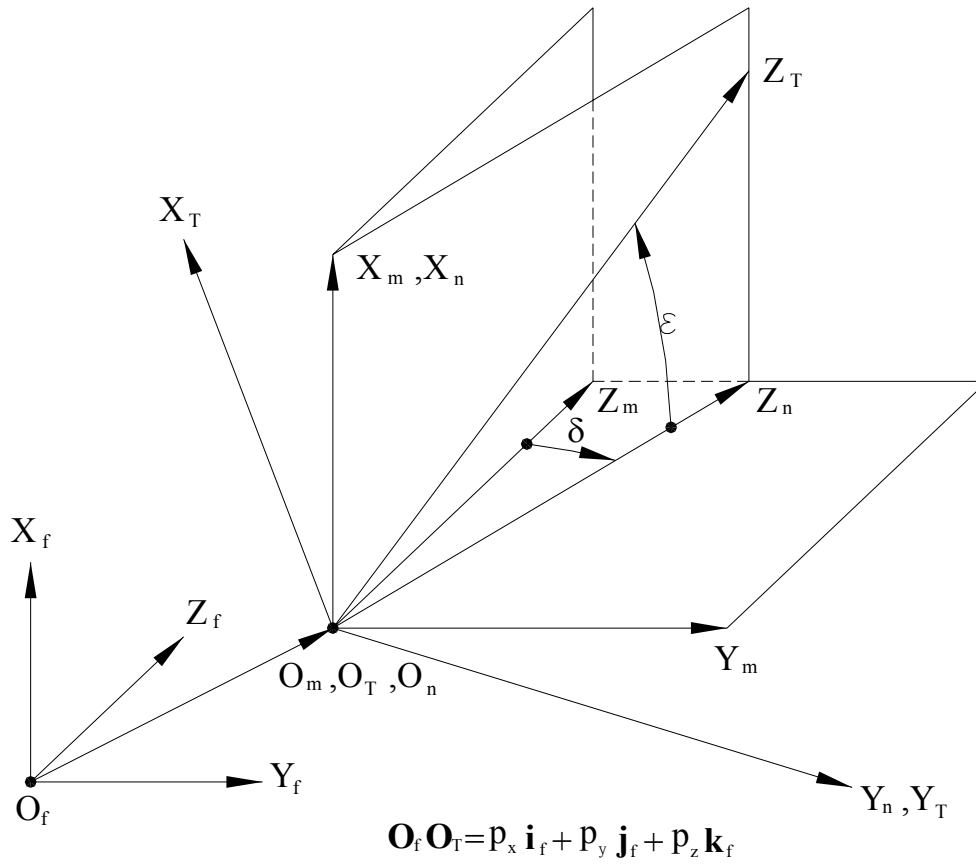


圖 4.2 接觸點與其切平面座標關係圖

首先將兩嚙合之蝸桿與蝸輪之齒面方程式經由座標轉換至切平面座標系 $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$ ，如圖 4.2 所示，其中座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 為蝸桿蝸輪組之固定座標系，座標系 $S_m(X_m, Y_m, Z_m)$ 和 $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$ 為輔助座標系， $\delta$ 角為 $Z_m$ 軸與 $Z_n$ 軸之夾角， $\varepsilon$ 角則為 $Z_T$ 軸與 $Z_n$ 軸之夾角。位置向量 $\mathbf{R_f}$ 由座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 轉換至座標系 $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$ 之齊次座標轉換矩陣方程式如下：

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_T^{(i)} &= \mathbf{M}_{T,n} \mathbf{M}_{n,m} \mathbf{M}_{m,f} \mathbf{R}_f^{(i)} \\
&= \mathbf{M}_{T,f} \mathbf{R}_f^{(i)} \quad (i=1,2)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{m,f} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & 0 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 & -p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{M}_{n,m} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta & -\sin\delta & 0 \\ 0 & \sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{M}_{T,n} &= \begin{bmatrix} \cos\varepsilon & 0 & -\sin\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varepsilon & 0 & \cos\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

經整理之後可得座標系  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$  轉換至座標系  $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$  之齊次座標轉換

矩陣如下：

$$\mathbf{M}_{T,f} = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon\sin\delta & -\sin\varepsilon\cos\delta & -p_x \cos\varepsilon + \sin\varepsilon(p_y \sin\delta + p_z \cos\delta) \\ 0 & \cos\delta & -\sin\delta & -p_y \cos\delta + p_z \sin\delta \\ \sin\varepsilon & \sin\varepsilon\sin\delta & \sin\varepsilon\cos\delta & -p_x \sin\varepsilon - \sin\varepsilon(p_y \sin\delta + p_z \cos\delta) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，可求得 ZK 型蝸桿齒面方程式表示在其共同切平面座標係  $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$  如下：

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_T^{(1)} &= \begin{bmatrix} R_{xT}^{(1)} \\ R_{yT}^{(1)} \\ R_{zT}^{(1)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_{xf}^{(1)} \cos\varepsilon - R_{yf}^{(1)} \sin\varepsilon\sin\delta - R_{zf}^{(1)} \sin\varepsilon\cos\delta - p_x \cos\varepsilon + \sin\varepsilon(p_y \sin\delta + p_z \cos\delta) \\ R_{yf}^{(1)} \cos\delta - R_{zf}^{(1)} \sin\delta - p_y \cos\delta + p_z \sin\delta \\ R_{xf}^{(1)} \sin\varepsilon + R_{yf}^{(1)} \sin\varepsilon\sin\delta + R_{zf}^{(1)} \sin\varepsilon\cos\delta - p_x \sin\varepsilon - \sin\varepsilon(p_y \sin\delta + p_z \cos\delta) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

同理，亦可求得飛刀創成之蝸輪齒面方程式表示在共同切平面座標系  $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$

如下：

$$\mathbf{R}_T^{(2)} = \begin{bmatrix} R_{xT}^{(2)} \\ R_{yT}^{(2)} \\ R_{zT}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$= \begin{bmatrix} R_{xf}^{(2)} \cos \varepsilon - R_{yf}^{(2)} \sin \varepsilon \sin \delta - R_{zf}^{(2)} \sin \varepsilon \cos \delta - p_x \cos \varepsilon + \sin \varepsilon (p_y \sin \delta + p_z \cos \delta) \\ R_{yf}^{(2)} \cos \delta - R_{zf}^{(2)} \sin \delta - p_y \cos \delta + p_z \sin \delta \\ R_{xf}^{(2)} \sin \varepsilon + R_{yf}^{(2)} \sin \varepsilon \sin \delta + R_{zf}^{(2)} \sin \varepsilon \cos \delta - p_x \sin \varepsilon - \sin \varepsilon (p_y \sin \delta + p_z \cos \delta) \end{bmatrix}$$

上述之  $p_x, p_y, p_z$  為接觸點  $\mathbf{O}_T$  在座標系  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$  之座標值，也就是接觸點之位置向量，另外，

$$\mathbf{R}_f^{(1)} = \begin{bmatrix} R_{xf}^{(1)} \\ R_{yf}^{(1)} \\ R_{zf}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{與} \quad \mathbf{R}_f^{(2)} = \begin{bmatrix} R_{xf}^{(2)} \\ R_{yf}^{(2)} \\ R_{zf}^{(2)} \end{bmatrix}$$

已分別表示在(3.3)式和(3.8) 式中。

由於  $Z_T$  軸與接觸點之法向量  $\mathbf{n}$  係同一方向，由圖 4.2 的幾何關係可知：

$$\tan \delta = \frac{n_y}{n_z}$$

$$\tan \varepsilon = \frac{n_x}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}} ,$$

其中， $n_x$ 、 $n_y$  和  $n_z$  為接觸點之單位法向量的三個分量。依照齒面外形法，接觸齒印可定義為兩齒面間距為  $6.32\mu\text{m}$  之點的集合，因此，接觸齒印可由下列非線性方程組來定義：

$$X_T^{(1)} = X_T^{(2)} , \quad (4.4)$$

$$Y_T^{(1)} = Y_T^{(2)} , \quad (4.5)$$

$$\tan(\theta_T) = \frac{Y_T^{(1)}}{X_T^{(1)}} , \quad (4.6)$$

$$\text{及} \quad |Z_T^{(1)} - Z_T^{(2)}| = 6.32\mu\text{m} , \quad (4.7)$$

其中  $-\pi \leq \theta_T \leq \pi$



以上四個非線性方程組包含五個未知數： $\theta$ 、 $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$ 、 $\phi_1$ 和 $\theta_T$ ，其中 $\theta$ 與 $\varphi_1$ 為 ZK 型蝸桿之齒面參數， $\varphi_2$ 與 $\phi_1$ 則為飛刀創成之蝸輪之齒面參數，以參數 $\theta_T$ 為輸入值，其範圍定義由 $-\pi$ 至 $\pi$ 。利用數值方法可求解以上聯立非線性方程組，並可求得接觸橢圓之外形及大小。

## 4.2 接觸齒印範例

以下範例將探討 ZK 型蝸桿與飛刀創成之蝸輪組在不同之設計參數及不同之裝配條件下，蝸桿蝸輪組之接觸齒印分布情形，並將接觸齒印繪於蝸輪之齒面上。

表 4.1 ZK 型蝸桿與 ZN 型蝸輪組之主要設計參數

	蝸桿 1	蝸桿 2	蝸桿 3	蝸輪 1	蝸輪 2	蝸輪 3
法向模數 $m(\text{mm}/\text{齒})$	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0
齒數	3	3	3	29	29	29
法向壓力角	23°	25°	27°	18°	20°	22°
交錯角 $\gamma$	45°					

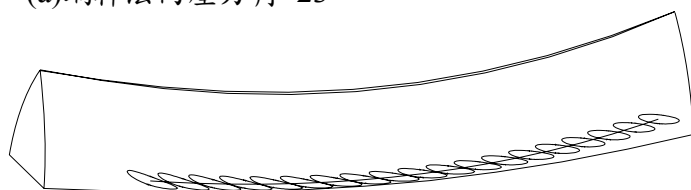
### 範例 1：

蝸桿蝸輪組之設計參數如表 4.1 所示，蝸桿之法向壓力角分別為 23°、25°和 27°，蝸輪之法向壓力角為 20°，假設在理想裝配條件下，探討此 ZK 型蝸桿與飛刀創成之蝸輪組之接觸齒印。利用前節所述之齒印分析方法，可求得接觸齒印並繪於蝸輪之齒面上，如圖 4.3 所示。圖中所繪之接觸齒印是蝸桿轉動角度從-180 度至 180 度，每 20 度繪出一個接觸齒印之結果，其中齒印跟水平線呈一個斜角。

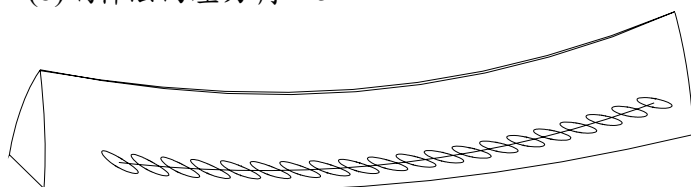
### 範例 2：

ZK 型蝸桿與飛刀創成之蝸輪組之設計參數如表 4.1 所示，蝸桿之法向壓力角為 25°，蝸輪之法向壓力角分別為 18°、20°與 22°，依然假設在理想裝配條件下，探討其接觸齒印的變化情形。齒印分析結果如圖 4.4 所示，當蝸輪之法向壓力角為 22°時，其接觸齒印相當靠近齒底。反之，當蝸輪之法向壓力角為 18°時，接觸齒印位置將往上提升即靠近齒面中間，故以此配對之蝸桿蝸輪組相較於前者(壓力角為 22°)為較合適之組合。

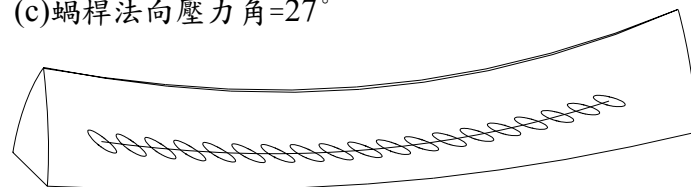
(a) 蝸桿法向壓力角=23°



(b) 蝸桿法向壓力角=25°



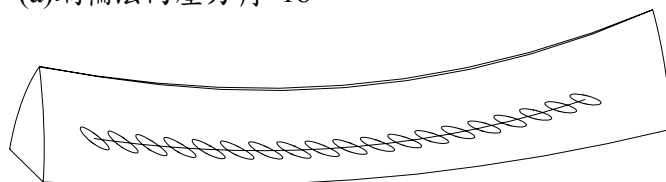
(c) 蝸桿法向壓力角=27°



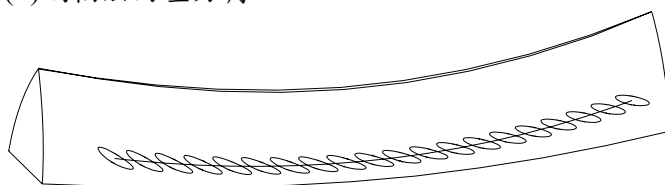
0 10 20 mm

圖 4.3 蝸桿壓力角對接觸齒印之影響

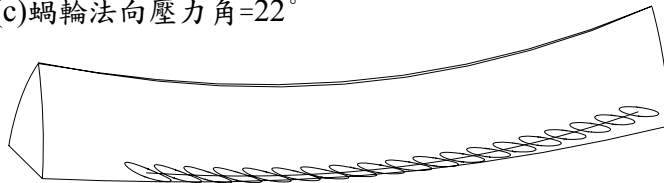
(a) 蝸輪法向壓力角=18°



(b) 蝸輪法向壓力角=20°



(c) 蝸輪法向壓力角=22°



0 10 20 mm

圖 4.4 蝸輪壓力角對接觸齒印之影響

依據範例一與範例二之分析結果可知，ZK 型蝸桿與飛刀創成之蝸輪之接觸齒印，越靠近蝸輪齒頂處，其接觸齒印會有些微的改變，長軸會相對變短。由蝸桿蝸輪組的嚙合以及裝配機構可知，若接觸點較靠近蝸輪齒面之齒頂處，此時，相對於蝸桿而言，此接觸點反而較接近蝸桿齒面之底部。若接觸點位置是在蝸桿齒面的下方處，其曲率較大，根據齒印的分析方法可知，此時蝸桿蝸輪組的接觸齒印將較小。反之，若接觸點位置是在蝸桿齒面的上方靠近齒頂處，則蝸桿蝸輪組之接觸齒印將相對較大。

## 第五章 飛刀創成之蝸輪與 ZK 型蝸桿之有限單元分析

在本論文第四章中，係以剛體條件下來分析蝸桿蝸輪組的接觸齒印分佈情形，然而剛體模型的分析並沒有考量到負載、摩擦和材料性質等因素，而這些因素都與實際齒印的大小和分布情況有著密切的影響，為了模擬更接近實際的蝸桿蝸輪組的嚙合狀況，本章節利用有限單元法(Finite Element Method)建立蝸桿蝸輪組的接觸分析模型，探討蝸桿蝸輪組在負載下的齒面接觸應力之接觸情形，以了解齒輪組在實際的負載下的接觸齒印。

有限單元法是一強而有效的計算方法，可以計算複雜的齒面變形與應力。眾多的學者利用有限單元法分析各種不同型式之齒輪，探討齒輪齒面的變形與應力[22-25]。學者 Tsay 與 Fong[26]及 Litvin 等人[27]利用齒輪接觸分析求得接觸齒印或接觸線，並在接觸齒印或接觸線上直接施加負載，用以研究齒面上的應力分佈。有些學者[28-30]利用間隙單元(Gap Element)模擬接觸邊界條件，分析三維齒面的應力分佈。有些學者[31-33]則利用有限單元法分析齒面的接觸應力與齒根彎曲應力，另一部分學者則利用應變規來量測齒根變形並與有限單元法比較[34,35]。

### 5.1 有限單元接觸分析之實體模型建立

在有限單元分析的模型中，一個完整的分析模型必須包含實體模型的物理特性設定、接觸面幾何定義、網格的建立、邊界條件及負載定義，本章則利用有限單元法來分析齒輪在負載下的接觸齒印，其假設條件如下：(1)被動件蝸輪以三齒來模擬蝸桿蝸輪齒輪組之接觸。(2)蝸桿蝸輪組的材料為等向均質材料(Isotropic-Homogeneous Material)。(3)蝸桿蝸輪組為小變形及小滑動。(4)不考慮熱應力。

#### 5.1.1 物理特性設定

所建構出來的蝸桿蝸輪組 3D 實體模型必須要設定材料性質，先將其假設為某一種材料，再依據此材料之物理性質來設定彈性模數、浦松比(Poisson's Ratio)及材料密

度，如此便可定義為欲分析的材料種類，然後必須建立一個具有已設定材料性質的實體截面，再將蝸桿蝸輪組分別指定所設定的截面類型。在有限單元分析中，不同的材料性質會產生不同的應力分析的結果，材料設計得太硬或太軟皆不適當，本節所分析的蝸桿蝸輪組其設定的材料為中碳鋼，而中碳鋼所需之材料相關設計參數如表 5.1。

表 5.1 材料特性

中碳鋼	AISI 1045
彈性模數 (MPa)	205.0E3
包松比(Poisson's Ratio)	0.29
密度 (Kg/mm <sup>3</sup> )	78.5E-7
硬度 (H <sub>B</sub> )	350

### 5.1.2 有限單元網格

根據本專題研究第一章所推導出飛刀創成之蝸輪與 ZK 型蝸桿之齒面數學模式，可計算出飛刀創成之蝸輪與 ZK 型蝸桿之齒面點座標，再將點座標匯入 CAD 軟體即可建立蝸桿蝸輪組之有限元素分析的實體模型，如圖 5-1。利用 ABAQUS/Standard 之自動產生網格功能，可將蝸桿蝸輪組以 4 個節點之四面體元素來建立有限元素接觸分析網格之模型，如圖 5-2 所示。針對蝸桿與蝸輪之接觸齒面部分，可將其網格局部加密以增加元素及節點，如此便可提高此接觸分析模型之幾何精度，並加速有限元素計算之收斂速度，也可獲得較準確的齒面接觸應力。

## 5.2 接觸面與表面特性定義

有限單元分析軟體 ABAQUS/Standard 中，其接觸分析之定義包含兩部分：接觸面之定義及接觸特性之定義，而接觸面又可分為兩種，一為 Master，另一種為 Slave。一般在設定上，接觸面之材料較硬或齒面之網格較粗者設定為 Master，而相反地，材料較軟或網格較細者為 Slave。在有限單元分析軟體 ABAQUS/Standard 中，其規定在 Master 上的節點可穿透 Slave，而 Slave 上的節點不可穿透 Master。所以，在本專題研究所建立的非 90° 蝸桿蝸輪組分析模型中，主要是觀察飛刀創成之蝸輪之齒面應

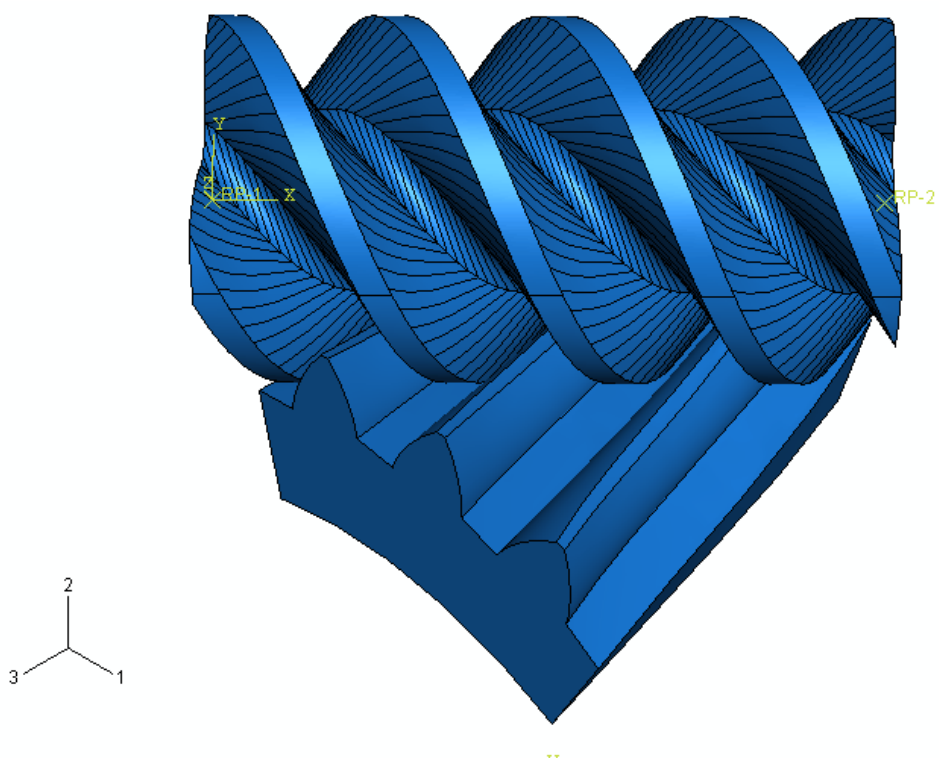


圖 5.1 非 90° 蝸桿蝸輪組之實體模型

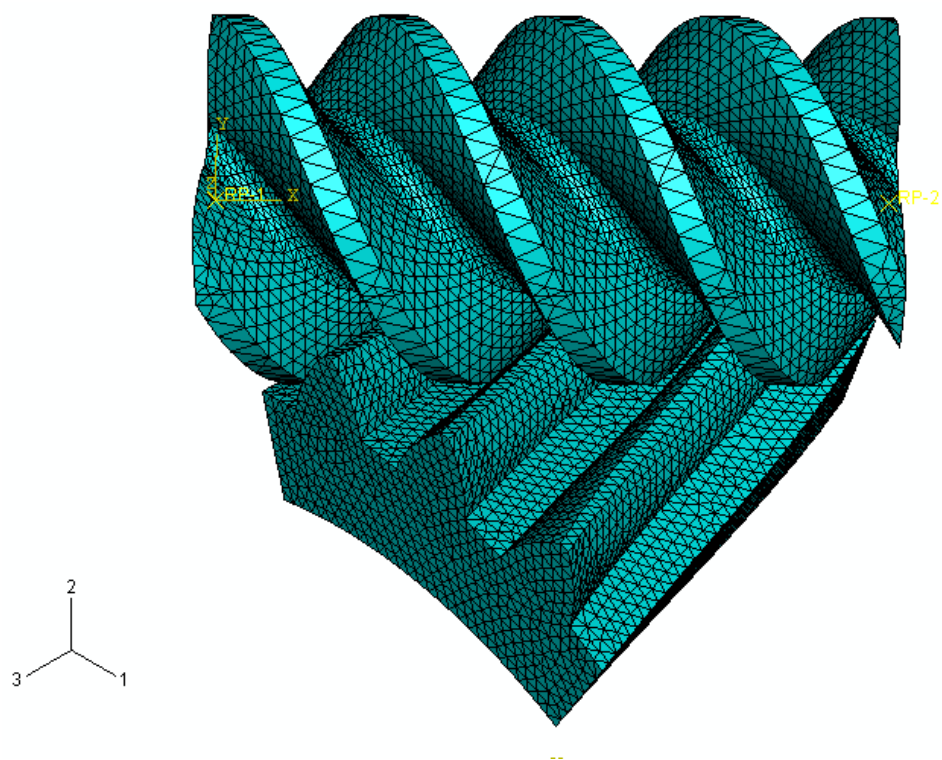


圖 5.2 非 90° 蝸桿蝸輪組之網格模型

力，且蝸桿與蝸輪在其嚙合運動過程中，蝸桿齒面在單位時間內與蝸輪為多齒接觸之齒面，因此蝸桿材料通常選擇較蝸輪為硬之材質，是故於分析模型中，蝸桿齒面假設為 Master，而蝸輪齒面假設為 Slave。此外，分析時之接觸面選擇具有小滑動(Small sliging)且在充分潤滑下，摩擦力可加以忽略。

### 5.3 邊界條件(Boundary Condition)與負載(Load)之定義

有限元素法分析實體模型所所使用的網格為四面體元素，故具有四個節點，而每個節點分別有三個平移自由度及三個旋轉自由度。在分析模型中，首先在蝸桿兩端面軸中心位置建立兩個參考點連結，將其視為旋轉軸且與蝸桿之創成旋轉軸重合。將蝸桿節點與此旋轉軸連結，則設定蝸桿依據此旋轉軸來做旋轉，此為旋轉之自由度。另外，尚有三個平移自由度及二個旋轉自由度則必須設定為固定不動。接著設定蝸輪邊界條件，將蝸輪之底邊及左右兩側邊平面上的每一節點均設為固定，亦即六個自由度皆為固定不動。一般蝸桿蝸輪組多以蝸桿為主動件，而本專題研究以分析蝸輪之齒面應力分佈為主，因此將扭力施加於蝸桿旋轉軸兩端面之參考點上，使蝸桿蝸輪組互相形成非  $90^\circ$  嚙合，故非  $90^\circ$  蝸桿蝸輪組的邊界條件設定之分析模型如圖 5-3 所示。

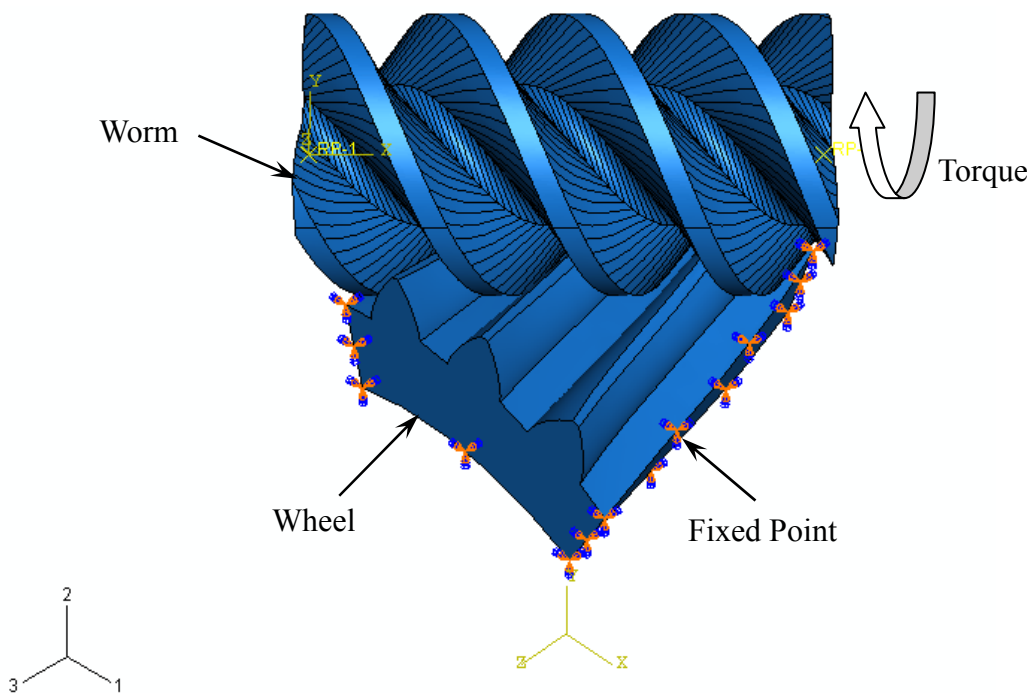


圖 5.3 非  $90^\circ$  蝸桿蝸輪組之邊條件與負載設定

## 5.4 結果分析

非 90° 蝸桿蝸輪組之主要設計參數如表 5.2 所示，蝸桿蝸輪接觸面之壓力角均分為 23°、25° 及 27°，又蝸桿蝸輪之交錯角為 45°，其中蝸桿齒數為 3 齒。蝸桿蝸輪組有限元素接觸分析模型資料如表 5-3 所示，蝸桿元素數量為 129,885 個、蝸輪元素數量為 90,062 個，故元素總數量為 219,947 個，而節點總數量共 42,790 點。在本專題研究之蝸桿蝸輪組之應力分析中，設定 ZK 型蝸桿以 200N-m 之扭力傳遞至固定的蝸輪。圖 5-4 至圖 5-6 為飛刀創成之蝸輪與 ZK 型蝸桿之蝸桿蝸輪組於負載下且不同壓力角之分析結果，其中在蝸輪應力分佈圖中，符號“S,Mises”表示 von Mises 應力，其應力單位為  $\text{N/mm}^2$ 。

表 5.2 蝸桿蝸輪組之設計參數

參數名稱	參數值
蝸桿旋轉方向	右旋
蝸輪旋轉方向	左旋
蝸桿蝸輪組之交錯角( $\gamma$ )	45°
蝸輪之節圓半徑( $r_2$ )	60.045 mm
中心距( $S$ )	72.045 mm
蝸輪齒數( $T_2$ )	29
蝸桿齒數( $T_h$ )	3
蝸桿導程角( $\lambda$ )	30°
蝸桿法向模數( $m$ )	4.0 mm
蝸桿節圓半徑( $r_1$ )	12.0 mm
蝸桿單位角度之導程( $p$ )	7.255mm/rad

表 5-3 有限元素模型資料

	ZK 型蝸桿	飛刀創成之蝸輪
接觸對	Master surface	Slave surface
表面特性	Small sliding, no friction	
邊界條件	Torque applied 200 N-m	Fixed

圖 5.4 至圖 5.6 為非 90° 蝸桿蝸輪組負載下的分析結果，其齒面壓力角分別為 23°、25° 及 27°，在不同的齒面壓力角下則蝸輪最大齒面接觸應力(Contact Stress)依序為 1495MPa、1101MPa 與 935.7 MPa。因此，當壓力角愈大蝸桿蝸輪所承受的齒面應力將會較小，且不容易造成蝸桿蝸輪齒面的損壞亦增加使用壽命。



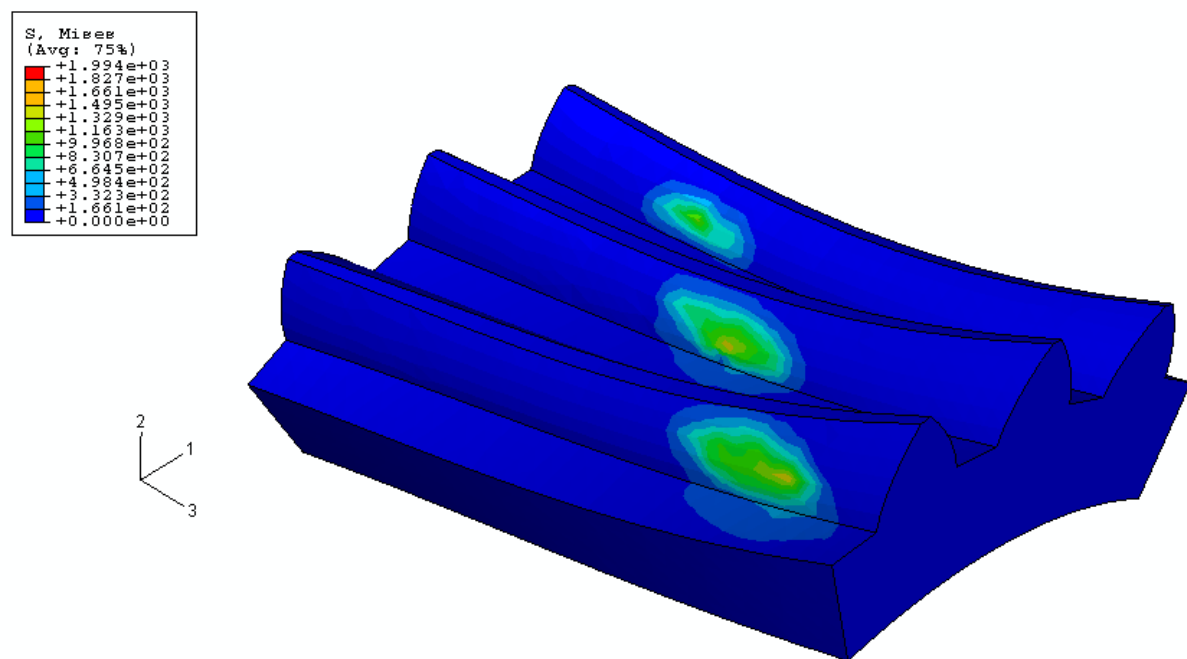
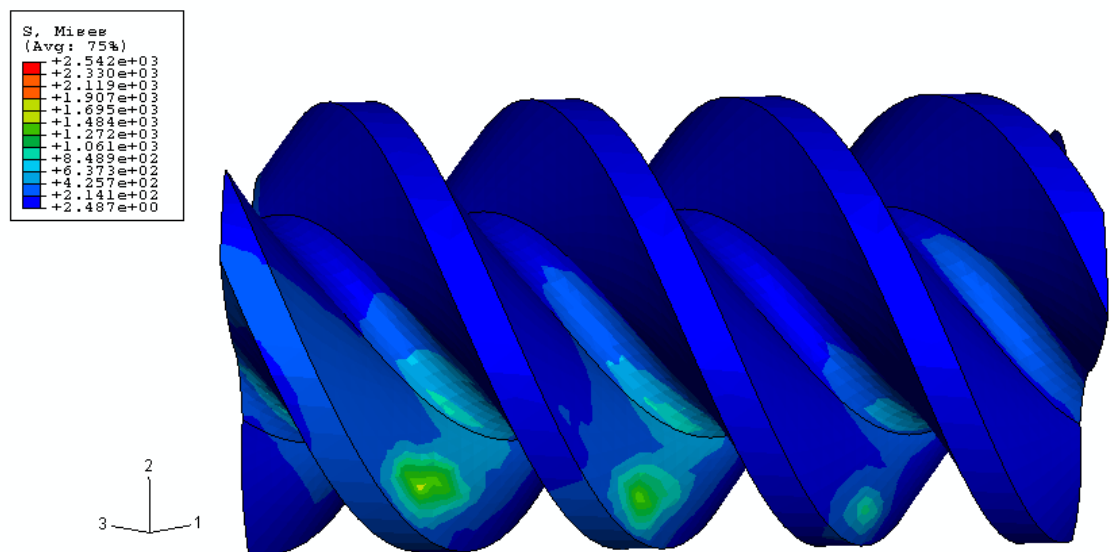


圖 5.4 ZK 型蝸桿齒面與飛刀創成蝸輪之應力分佈(壓力角  $23^\circ$ )

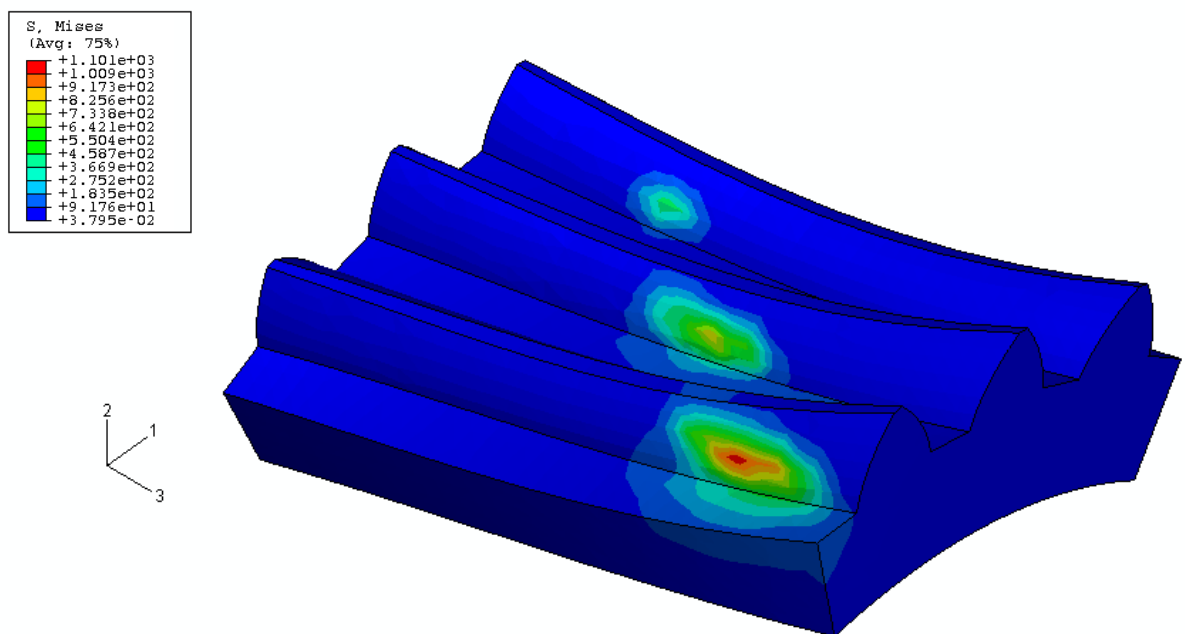
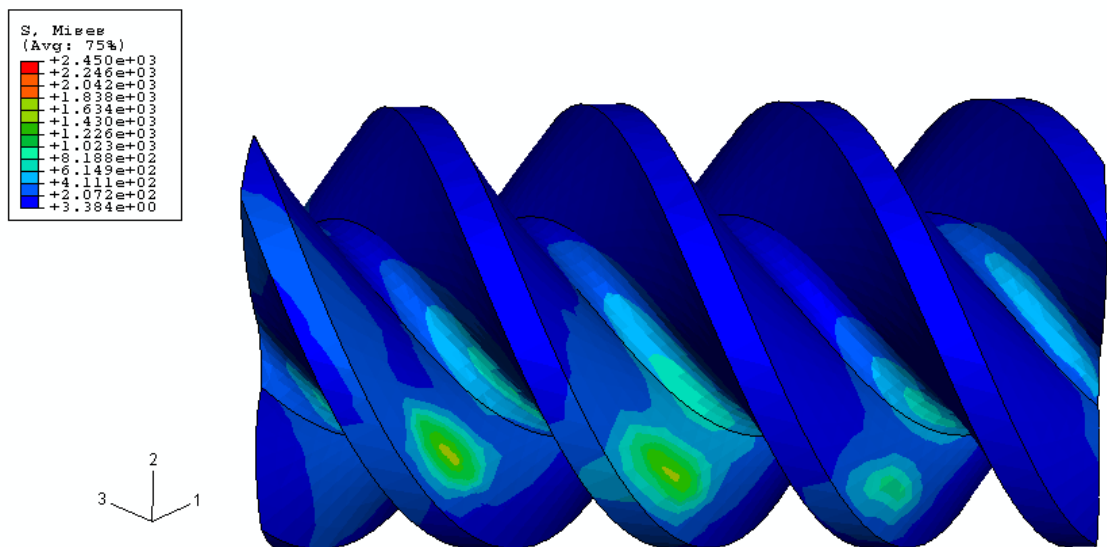


圖 5.5 ZK 型蝸桿齒面與飛刀創成蝸輪應力分佈(壓力角  $25^\circ$ )

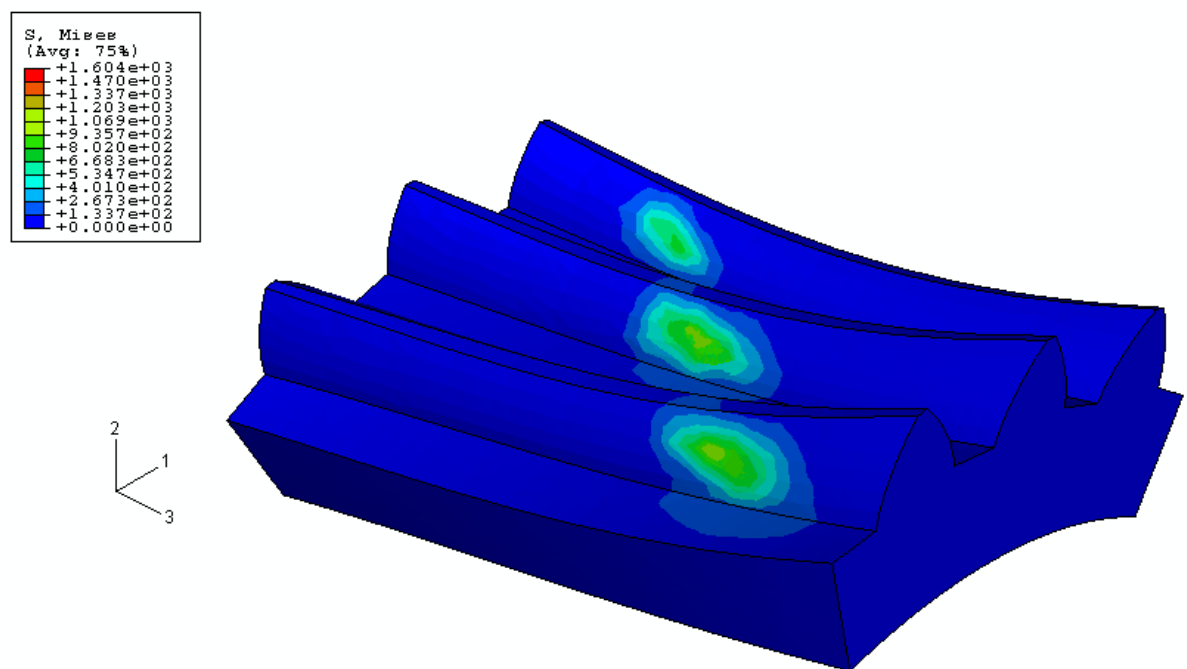
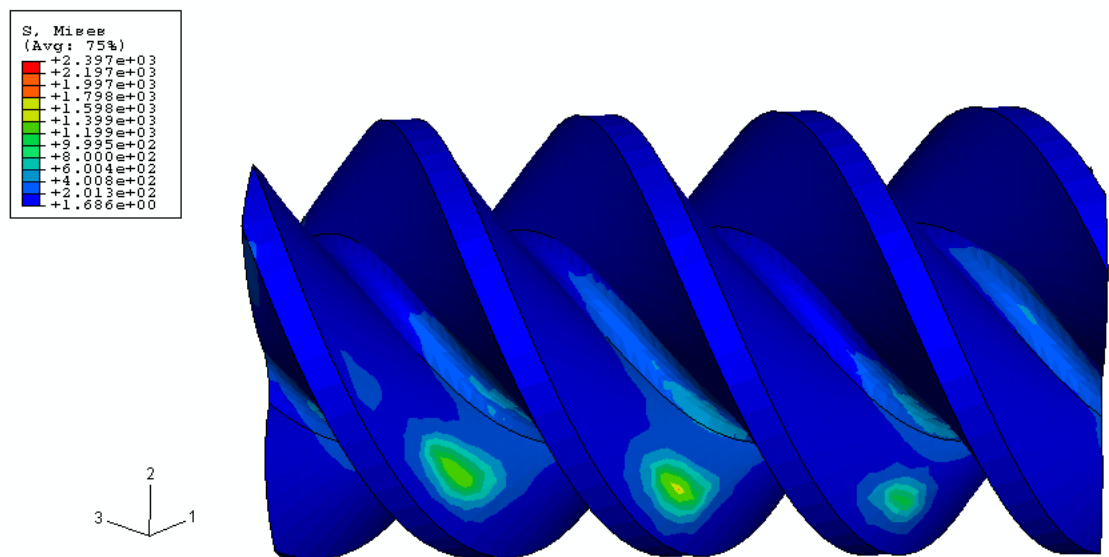


圖 5.6 ZK 型蝸桿齒面與飛刀創成蝸輪應力分佈(壓力角  $27^\circ$ )

## 参考文献

- [1] Bosch M., "Economical Production of High Precision Gear Worms and Other Thread Shaped Profile by Means of CNC-Controlled Worm and Tread Grinding Machine," Klingelnberg Publication, Germany, 1988, pp. 3-19.
- [2] Zheng, C., Lei, J., and Savage, M., "A General Method for Computing Worm Gear Conjugate Mesh Property: Part 1 – the Generating Surface," Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 111, pp. 143-147, March 1989.
- [3] Zheng, C., Lei, J., and Savage, M., "A General Method for Computing Worm Gear Conjugate Mesh Property: Part 2 – the Mathematical Model of Worm Gear Manufacturing and Working Process," Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 111, pp. 148-152, March 1989.
- [4] Colbourne, J. R., "The Use of Oversize Hobs to Cut Worm Gears," AGMA, Technical Paper, 1989
- [5] Oiwa, T., Kobayashi, K., and Toyama, A., "Grinding of Highly Accurate Hourglass Worm Gears-Trial Manufacture of the Worm Grinding Device," Precision Engineering, Vol. 12, No. 2, pp. 85-90, April 1990.
- [6] Simon, V., "Hob for Worm Gear Manufacturing with Circular Profile," International Journal of Machine Tools & Manufacture, Vol. 33, No. 4. 1993, pp. 615-625.
- [7] Kin, V., "Topological Tolerancing of Worm-Gear Tooth Surfaces," Gear Technology, pp. 30-35, November/December 1993.
- [8] Litvin, F. L., Gear Geometry and Applied Theory, PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.
- [9] Litvin, F. L., Kin, V., and Zhang, Y., "Limitations of Conjugate Gear Tooth Surface," Journal of Mechanical Design, Vol. 112, pp. 230-236, June 1990.
- [10] Kin, V., "Limitations of Worm and Worm Gear Surfaces in Order to Avoid

- Undercutting,” Gear Technology, pp. 30-35, November/December 1990.
- [11]Fong, Z. H. and Tsay C. B., “The Undercutting of Circular-Cut Spiral Bevel gears,” ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 114, pp. 317-325, 1992.
- [12]Simon, V., “Stress Analysis in Double Enveloping Worm Gears by Finite Element Method,” Journal of Mechanical Design, Vol. 115, pp. 179-185, March 1994.
- [13]Simon, V., “A New Worm Gear Drive with Ground Double Arc Profile,” Journal of Mechanism and Machine Theory, Vol. 29, No. 3, pp 407-414, 1994.
- [14]Litvin, F. L. and Seol, I. H., “Computerized Determination of Gear Tooth Surface as Envelope to Two Parameter Family of Surfaces,” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 138, pp. 213-225, 1996.
- [15]Jannink, W. L., “Contact Surface Topology of Worm Gear Teeth,” Gear Technology, pp. 31-47, March/April 1988.
- [16]Litvin, F. L. and Kin, V., “Computerized Simulation of Meshing and Bearing Contact for Single-Enveloping Worm-Gear Drives,” Journal of Mechanical Design, Vol. 114, pp. 313-316, June 1992
- [17]Bair, B. W. and Tsay, C. B., “ZK-type dual-lead worm and worm gear drives: Contact teeth, contact ratios and kinematic errors,” Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, v 120, n 3, Sep, 1998, pp. 422-428.
- [18]Fang, H. S. and Tasy C. B., “Mathematical Model and Bearing Contacts of the ZK-Type Worm Gear Set Cut by Oversize Hob Cutters,” Mechanism and Machine Theory, Vol. 31, No. 3, pp. 271-282, 1996.
- [19]Fang, H. S. and Tsay, C. B., “Mathematical Model and Bearing Contacts of the ZN-Type Worm Gear Sets Cut by Oversize Hob Cutters,” Mechanism and Machine Theory, Vol. 35, No. 12, 2000, pp. 1689-1708.
- [20]Arakawa, A. and Emura, T., “Contact Ratio of Noncircular Gears,” Transactions of JSME, Vol. 61 Part C, No. 585, pp.2093-2099, 1995.

- [21]Umeyama, M., Kato, M. and Inoue, K., “Effects of Gear Dimensions and Tooth Surface Modifications on the Loaded Transmission Error of a Helical Gear Pair,” International Power Transmission and Gearing Conference, DE Vol. 88, pp. 725-732, 1996.
- [22]Chen, W. H. and Tsai, P., “Finite Element Analysis of an Involute Gear Drive Considering Friction Effects,” ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 111, pp. 94-111, 1989.
- [23]Ganesan, N. and Vijayarangan, S., “Static Contact Stress Analysis of a Spur Gear Tooth Using the Finite Element Method, Including Frictional Effects,” Computers and Structures, Vol. 51, pp. 765-770, 1994.
- [24]Simon, V., “FEM Stress Analysis in Hypoid Gears,” Mechanism and Machine Theory, Vol. 35, pp. 1197-1220, 2000.
- [25]Simon, V., “Stress Analysis in Double Enveloping Worm Gears by Finite Element Method,” ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 115, pp. 179-185, 1993.
- [26]Tsay, C. B. and Fong, Z. H., “Computer Simulation and Stress Analysis of Helical Gears with Pinion Circular Arc and Gear Involute Teeth,” Mechanism and Machine Theory, Vol. 26, pp. 145-154, 1991.
- [27]Litvin, F. L., Chen, J. S., Lu, J. and Handschuh, R. F., “Application of Finite Element Analysis for Determination of Load Share, Real Contact Ratio, Precision of Motion, and Stress Analysis,” ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 118, pp. 561-567, 1996.
- [28]Filiz, I. H. and Eyercioglu, O., “Evaluation of Gear Tooth Stresses by a Finite Element Meshing Simulation,” ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 117, pp. 232-239, 1995.
- [29]Bibel, G. D., Kumar, A., Reddy, S. and Handschuh, R., “Contact Stress Analysis of Spiral Bevel Gears Using Finite Element Analysis,” ASME Journal of Mechanical

- Design, Vol. 117, pp. 235-240, 1995.
- [30]Bibel, G. D. and Handschuh, R., “Meshing of a Spiral Bevel Gear Set With 3-D Finite Element Analysis,” Gear Technology, March/April, pp. 44-47, 1997.
- [31]Litvin, F. L., Fuentes, A., Fan, Q. and Handschuh, R. F., “Computerized Design, Simulation of Meshing, and Contact Stress Analysis of Face-Milled Formate Generated Spiral Bevel Gears,” Mechanism and Machine Theory, Vol. 37, pp. 441-459, 2002.
- [32]Chen, Y. C. and Tsay, C. B., “ Stress Analysis of a Helical Gear Set with Localized Bearing Contact,” Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 38, No. 8 pp. 707-723, 2002.
- [33]Barone, S., Borgianni, L. and Forte, P., “Evaluation of the Effect of Misalignment and Profile Modification in Face Gear Drive by a Finite Element Meshing Simulation,” ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 126, pp. 916-924, 2004.
- [34]Handschuh, R. F. and Bibel, G. D., “Experimental and Analytical Study of Aerospace Spiral Bevel Gear Tooth Fillet Stresses,” ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 121, pp. 565-572, 1999.
- [35]Li, S., “Gear Contact Model and Loaded Tooth Contact Analysis of a Three-Dimensional, Thin-Rimmed Gear,” ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 124, pp. 511-517, 2002.
- [36]Liu C. C., J.H. Chen, C.B. Tsay and Y. Ariga, 2006, “Meshing Simulation of the Worm Gear Cut by a straight-edged Flyblade and the ZK-Type Worm with a Non-ninety-degree Crossing Angle,” Mechanism and Machine Theory, Vol.41, pp.987~1002.

## 計劃成果自評

藉由齒輪嚙合原理，並使用磨輪配合磨床機構來模擬創成 ZK 型蝸桿，可以推導獲得 ZK 型蝸桿齒面之數學模式。由於 ZK 型蝸桿齒面數學模式，是在不考慮加工誤差及熱變形等理想狀況下所推導之齒面模式，因此，此蝸桿齒面數學模式可做為三次元量測儀做為比較實際切製之齒面變異的標準齒面。ZK 型蝸桿在不改變其切削刀具，而透過改變磨輪刀具之壓力角，即可根據不同之需求狀況，來調整 ZK 型蝸桿在其軸向截面上的齒厚。本研究係將飛刀創成蝸輪之運動機構，先以蝸桿型滾刀來模擬此飛刀之創成動作，然後再以蝸桿型滾刀配合滾削機構來創成蝸輪，故已完成蝸輪齒面數學模式之推導，並應用電腦輔助繪圖程式，將可描繪出蝸桿及蝸輪之實體模型。由蝸輪之左右齒面為相反對稱，而在蝸輪之齒面上，越接近齒面寬中央截面處，齒面越容易發生過切現象，若能避免齒面寬中央截面之齒面發生過切，則齒面其他位置將不會發生過切。為了避免蝸輪齒面的過切，本研究亦探討蝸桿蝸輪組之蝸輪齒面發生過切現象與其齒面壓力角和軸交角的關係。

本專題研究已依據 ZK 型蝸桿之齒面數學模式與由飛刀創成之蝸輪齒面的數學模式再經由座標轉換，成功地建立了非對偶創成之非  $90^\circ$  交錯角蝸桿蝸輪組在具有組裝誤差時接觸嚙合之數學模式。利用此嚙合模式所發展的電腦輔助齒面接觸分析軟體，已經完成了蝸桿蝸輪組在不同的裝配狀況與設計參數下嚙合時的運動誤差、接觸比及接觸齒印的分析。在非  $90^\circ$  交錯角且具有大導程角之非對偶創成的蝸桿蝸輪組在理想裝配狀況下，無論是否具有對偶創成之關係，其蝸桿蝸輪組之接觸情形皆為點接觸，同時也沒有運動誤差。本研究亦探討改變 ZK 型蝸桿之齒面法向壓力角或者創成蝸輪之飛刀之法向壓力角參數下，即可改變蝸桿蝸輪組之接觸比及接觸齒印位置。當蝸桿蝸輪組之接觸比越大，亦即表示接觸的齒數越多，並且接觸齒印落點亦偏向齒面寬中間，而可以提供更高的負載。

本計畫利用有限單元分析軟體 ABAQUS/Standard，即可快速建立齒輪接觸分析有限單元模型，從定義模型之物理特性、定義物件接觸面、表面特性、設定邊界條件、



負載以及有限單元分析網格，依據這些設定條件即可完整的建構且並加以分析其接觸齒面之應力。

本研究計畫在各年度之研究項目均依原計畫書規畫之研究項目內容、進度和目標，完成各項研究工作，所獲成果相當優良，已有一篇論文投稿國際著名之學術期刊 *Journal of Mechanism and Machine Theory*，並已刊載[36]，另外亦陸續整理相關論文投稿中，未來也尋求產業界之應用與推廣。

專題研究題目：飛刀創成之蝸輪與 ZK 型蝸桿之接觸特性研究

( 3/3 )

計 畫 編 號：NSC95-2221-E159-010

執 行 期 限：95 年 8 月 1 日至 96 年 7 月 31 日

執 行 單 位：明新科技大學 機械工程系

計 畫 主持人：蔡忠杓

出國研究期間：96 年 7 月 19 日至 25 日

國外研究地點：日本國 日本工業大學

# 研究心得報告

日本工業大學今(2007)年 6 月 29 日剛慶祝建校 100 週年之校慶，該校歷史悠久，且以機械、電機、資訊、建築及系統工程等系所為主，該校之教學注重實務與實作，而研究方面則著重於應用性研究。該校在機械與齒輪製造方面的設備相當充實，同時在機械加工中心裡也有多位專職且經驗豐富的技術人員，可充分協助教師進行各項製作與測試，對於學術研究與技術開發相當重要且貢獻良多。

本人與日本工業大學機械工學科的長田重慶教授(目前為該校榮譽退休教授但仍繼續研究工作)及有賀幸則教授之合作研究關係已有十三年之久，兩位教授及其支援團隊技術人員在各種齒輪之製造與測試方面，具有相當之國際聲望，尤其在各種新型齒輪之研究開發、製造與測試，更是日本工業大學研究團隊之重點，此乃得力於該校所設之機械加工中心，此中心有各種機械加工設備及齒輪加工製造設備(如圖 1)，以及五位全職且經驗豐富之資深技術人員支援各種新型齒輪之開發與加工製造(如圖 2~圖 5)，這些優勢是國內各大學所欠缺的。因此，本人長期以來與日本工業大學兩位教授及其支援團隊，始終維持良好而且緊密的實質合作研究關係，雙方每年均有互訪並已有多篇共同研究成果發表於世界著名之學術期刊，如美國機械工程學會 ASME Journal of Mechanical Design 期刊論文、機構與機器原理學會 Mechanism and Machine Theory 期刊論文、日本機械工程學會及我國之中國機械工程學會之期刊論文，雙方合作研究之成果甚佳，這也是雙方能長期維持實質與緊密合作研究關係之基石，對雙方之學術研究均有互助互利之功效。2005 年雙方合作研究之成果” Meshing Simulations of the Worm Gear Cut by a Straight-Edge Flyblade and the ZK-Type Worm with a Non-Ninety-Degree Crossing-Angle” 不但發表於義大利舉行的 2005 International Workshop on Computational Kinematics，同時也被大會選為九篇代表性論文而發表刊登於世界著名的 Mechanism and Machine Theory 學術期刊，可說是合作研究成果豐碩的一年。2006 年雙方合作研究之成果” Mathematical Model and Tooth Undercutting of Curvilinear Gears with Circular Tooth Profiles” 也已投稿至 ASME Journal of Mechanical Design 學術期刊。

本人此次學術合作研究訪問自 96 年 7 月 19 日起至 25 日止共為期七天。由於第一天飛抵日本東京成田機場再搭車至東京進住池袋大都會飯店(Metropolitan Hotel) 已是下班時間，因此並未進行訪問。第二天(7 月 20 日)上午則與長田重慶教授和有賀幸則教授先進行過去一年雙方合作研究的曲線齒輪兩個主題之

研究成果簡報，對於創成曲線齒輪（Curvilinear-tooth Gears）之盤型刀具，分別探討採用刀具剖面為直邊及圓弧型刀具來切削製造的方法以及使用齒條刀來模擬盤狀刀具之滾削製造方法之研究成果及其所遭遇到之困難和新發現，進行深度的討論，尤其是兩種不同製造方法之優缺點和產業實用性以及曲線齒輪當具有較小曲線半徑時，以滾齒切削所造成的曲線齒輪之齒面二次切削問題，進行了相當深入的討論。日本工業大學方面以其齒輪滾齒設備和經驗豐富之技術人員支援，順利完成曲線齒輪具較小曲線半徑之實際滾齒切削；本人則在台灣同步進行曲線齒輪滾齒切削之理論推導與模擬，也將盤型刀具製造曲線齒輪列入研究主題，同時也完成以圓弧型盤狀刀具剖面切製曲線齒輪之研究，目前該合作研究成果也已整理撰寫論文並已投稿於美國機械工程學會之 ASME Journal of Mechanical Design 期刊論文審查中。

訪問之第三天及第四天則為星期六和星期日，稍做資料整理與星期一合作研究討論主題之相關資料準備。合作研究訪問之第五天（7 月 23 日）則在長田重慶教授、有賀幸則教授及小守勉講師陪同下，前往日本工業大學機械加工中心，與資深技術員石井治實先生等(如圖 6)一同討論 2007 至 2008 年度雙方擬合作研究之圓弧型滾刀創成之蝸桿蝸輪組之齒輪加工設備及製造方法。雙方對於此新的合作研究主題之細節及其蝸桿蝸輪組實際之滾削情形，有了更進一步的溝通和了解，此次會談提供了相當清楚的刀具設定方式和刀具運動路徑以及刀具工件之間的關係，這對於日後之理論模擬與分析很有幫助。另外，對於上年度雙方合作之另一個主題「非對稱齒形之蝸桿輪組」之研究成果以及「非九十度交錯角蝸桿蝸輪組」之研究成果亦加以討論，並準備撰寫論文投稿。

合作研究訪問之第六天(7 月 24 日)則在機械加工中心與有賀幸則教授及石井治實技術員針對下一年度(2007 至 2008 年)雙方可能之合作研究的主題細節上再加以詳細討論，此合作研究主題可能做為目前個人在交通大學指導之博士班學生論文題目。日本工業大學將向日本產業界訂做圓弧型滾刀，以滾製蝸桿，但對於具圓弧齒形之蝸桿型滾齒刀(Worm-type Hob Cutter)，日本產業界是否也可以製造則表示懷疑。不過仍會試著去進行這項新的合作研究議題。

第七天（最後一天）則上午十點半離開東京，搭車前往成田機場，並於下午二點十五分搭乘長榮航空班機返台已將近下午六點鐘，順利完成了此次赴日學術合作研究訪問之工作。

此次前往日本工業大學進行學術合作研究訪問，雙方已達成一項新的合作研究主題，亦即圓弧型滾刀創成之蝸桿蝸輪組研究與開發以及該型蝸桿蝸輪之設計、製造、模擬與分析，本人將針對這項研究主題在台灣帶領博士班學生進行研究，也可培養學生之國際視野及增進國際合作研究與交流之經驗，除了培育高階研發人才外，也可讓學生更具自信與國際觀，因此，實質且緊密之國際合作研究應是學術研究相當必要的一種實施方式。

附圖

圖 1.



圖 2.



圖 3



圖 4.



圖 5.



圖 6.



# 行政院國家科學委員會補助國內專家學者出席國際學術會議報告

96 年 7 月 03 日

附件三

報告人姓名	趙立基	服務機構及職稱	博士生
時間 會議 地點	2007/06/17-21 法國，貝桑松	本會核定 補助文號	NSC 95-2221-E-159-010
會議 名稱	(中文) 第十二屆機構與機器科學世界會議 (英文) 12 <sup>th</sup> World Congress in Mechanism and Machine Science		
發表 論文 題目	(中文) 球形齒輪之接觸特性 (英文) Contact Characteristics of Spherical Gears		
<p>一、參加會議經過</p> <p>第十二屆機構與機器科學世界會議(12<sup>th</sup> World Congress in Mechanism and Machine Science)於2007年6月17-21日在法國貝桑松(Besancon)的Micropolis舉行。此會議每四年舉行一次，且今年是由法國委員會(France Committee)主辦。筆者於台灣時間民國九十六年六月十五日星期五晚上十一時五十五分由桃園國際機場搭乘長榮航空之班機直飛法國，翌日(台灣時間十六日)下午到達法國戴高樂國際機場，飛行時間約為13小時。因台灣與法國時差為六小時，所以抵達法國戴高樂機場之當地時間約為2007年6月16日上午8時。接著搭乘地鐵抵達巴黎市區之投宿旅館休息並準備論文發表之相關事項。隔日(法國時間17日)上午搭乘法國高鐵SNCF由法國巴黎前往研討會舉辦之城市貝桑松(Besancon)，乘車時間約為兩小時三十分，抵達貝桑松車站之時間約為17日下午1點。大會於貝桑松車站內設有接待點及接駁巴士接待參與會議之學者專家抵達會議中心(Micropolis)。筆者在會議中心報到完畢且領取相關文件之後便至大會提供之學生宿舍盥洗休息。此次會議除了白天之研討會之外，報到當天晚上(17日)於會議中心更設置了一場歡迎晚宴讓與會的所有貴賓可以認識新朋友及增廣見聞。翌日(18日)下午14:40-15:00為筆者報告論文的時段，報告場次與地點為「齒輪與傳動(Gearing and Transmission)」第2場次2室(Session GT-2, Room 2)，場次主持人為Carlos Lopez-Cajun先生及Ales Belsak先生。筆者發表之論文題目為「球形齒輪之接觸特性(Contact Characteristics of Spherical Gears)」，論文報告之過程尚算順利，且有三位學者專家提出問題與筆者討論。除了發表論文外，筆者亦到場聆聽幾篇與自身研究領域相關之論文發表與參觀兩項展出(Poster)的研究。在會議期間內，筆者在會議中心亦認識了幾位台灣及大陸的學者。除了聆聽與參觀會議議程中發佈之研究，筆者也去貝桑松市區參觀了在法國貝桑松具有歷史意義的「時鐘博物館」。由於大會提供了優質的會議場地且眾多具學術價值的研究論文在此發表，因此所有與會的學者專家均有不虛此行的感覺。</p> <p>二、與會心得</p> <p>此次研討會共有來自 51 個不同國家之學者專家熱情參與，總計有多達 550 篇之研究論文於此次大會中發表，其中涵蓋了 18 個不同的專業領域：(1)生物力學(Biomechanics)，(2)人機系統(Human-Machine Systems)，(3)齒輪與傳動(Gearing and Transmission)，(4)連</p>			



桿與凸輪(Linkages and Cams)，(5)電子機械(Mechatronics)，(6)微機構(Micromechanisms)，(7)機器人(Robotics)，(8)教育(Education)，(9)機構與機器科學之歷史回顧(History of MMS)，(10)機器動力學(Dynamics of Machinery)，(11)設計方法(Design Methodology)，(12)計算運動力學(Computational Kinematics)，(13)摩擦學(Tribology)，(14)運輸機械(Transportation Machinery)，(15)轉子動力學(Rotor Dynamics)，(16)非線性震盪(Nonlinear Oscillations)，(17)機器與機構之可靠度(Reliability of Machines and Mechanisms)及(18)多體動力學(Multi-Body Dynamics)。本次研討會所發表的技術論文主題相當廣泛，涵蓋機械工程的各個研究領域，大會將上述研究領域之技術論文分別安排於四天的論文發表議程，此研討會算得上是大型的國際學術研討會。

此外，大會安排了四場專題演講分別於 18 日上午(A.M.9:30-10:30)、19 日下午(P.M.2:00-3:00)及 20 日下午(P.M.2:00-3:30)，其中 20 日下午有兩場專題演講且這些專題演講題目依序為：(1)Forced Response Computation for Bladed Disks Industrial Practices and Advanced Methods，(2)The Specificity of Traction Motors for Railways Application，(3)A Microassembly System for Manufacturing Hybrid MEMS 及(4)Human Powered Flywheel Motor：Concept, Design, Dynamics and Applications。以上演講者依序分別為法國 TurboMECA 公司的 E. Seinturier 先生，法國阿爾斯通(Alstom)公司的 Dominique Jamet 先生，瑞士 ETH Zurich(Swiss Federal Institute of Technology)大學的 Bradley J. Nelson 學者及印度 Priyadarshimi 大學的 Jayant P. Modak 學者。

筆者參加這次第十二屆機構與機器科學世界大會，吸收學術知識、了解國外工程系統設計及分析技術領域研究現況，獲益良多。而且這次研討會所涵蓋的專業領域非常廣泛，除了比者本身設計製造領域的專長外，更可以吸取其他領域的相關新知。藉由這次的研討會，能與多位學者專家接觸，深深體會各地的專家對於機械工程技術及應用領域的研究相當積極，值得我們效法學習。

### 三、考察參觀活動(無是項活動者省略)

無參與是項活動。

### 四、建議

藉由世界型研討會作為先端技術的學術交流及認識各個國家之研究人才是一個極佳的管道。筆者在此由衷感謝國科會的經費贊助，除了發表論文之外，更使筆者得以進一步了解世界各國之學者專家的研究方向及趨勢，著實增加了不少新的視野，可謂受益匪淺；並建議政府應繼續多鼓勵及贊助國內學者專家參加國際性的學術會議，以提升國內學者在相關領域的學術地位及促進國際學術交流，以拓展學術外交。另一方面，台灣若有機會主辦類似的國際型學術會議，政府應積極爭取主辦的權利，以打響台灣在國際學術界之知名度。筆者再次感謝國科會的經費贊助，深感此種國際會議是很好的學術交流機會，更能讓國內研究步調與世界接軌。希望有關單位積極鼓勵國內更多學者參與，提升我國國際學術地位，使得國際學術交流的管道暢通，並可建立國際學術外交。

### 五、攜回資料名稱及內容

1. 研討會論文光碟(CD-ROM)一片，光碟片內含所有被發表論文之電子檔及大會議程電子檔。
2. 研討會論文集一套六冊，論文集內含所有被發表論文之紙本文件。
3. 大會議程手冊一本。

## Contact Characteristics of Spherical Gears

Li-Chi Chao<sup>\*</sup>  
Graduate Student,  
Department of Mechanical Engineering,  
National Chaio Tung University,  
Hsinchu, 30010, Taiwan

Chung-Biau Tsay<sup>+</sup>  
Chair Professor,  
Department of Mechanical Engineering,  
Minghsin University of Science and Technology,  
Hsinchu, 30401, Taiwan

**Abstract**—In this paper, the theory of gearing and the mechanism of gear cutting have been applied to develop the mathematical model of spherical gears. Based on the developed mathematical model of spherical gears, computer aided design (CAD) and tooth contact analysis (TCA) of spherical gear sets have been performed. The TCA results provide useful information about the kinematic error (KE) and the contact pattern of spherical gear sets.

**Keywords:**spherical gears, continuous shifting, tooth contact analysis, contact ellipses, kinematic errors

### I. Introduction

In the past, many investigates have been made for spur gears, helical gears and bevel gears including their respective mathematical models, characteristics, stress analyses and manufactures. Tsay [1] investigated the geometry, computer simulation, tooth contact analysis and stress analysis of the involute helical gear. The spur gear is a special case of helical gears with zero degree of helix angle. Liu and Tsay [2] studied contact characteristic of bevel gears. Tsai and Chin [3] discussed surface geometry of bevel gears. Litvin et al. [4] probed into low-noise high endurance of bevel gears by design, manufacture, stress analysis and experimental tests. The tooth contact analysis (TCA) method was proposed by Litvin [5-7], and it had been applied to simulate the meshing of gear drives. The TCA results provide us some useful information on contact points, contact ratio and kinematic error (KE) of gear sets. The surface separation topology method was proposed by Janninck [8], and it can be applied to determine the contact ellipses on tooth surface of gear sets.

Spherical gear is a new type of gear proposed by Mitome et al. [9]. The shapes of spherical gears have convex tooth and concave tooth that similar to the ball and the worm gear, respectively. Compared with the spur gear pair, the spherical gear set can allow the axial misalignments and transmit a rotational motion between two intersecting shafts with variable shaft angles. These are two major advantages of spherical gears. Basically, the spherical gear is composed of an infinitive pieces of spur gears with a continuous gear shifting along the gear rotation axis. It's similar to the bevel gear but the continuous shifting of spherical gear is in the second order i.e. a curve. The spherical gear pair has three mating types : convex tooth with convex tooth, convex tooth with

concave tooth and convex tooth with spur tooth. Figure 1 shows these three mating types of spherical gear sets with axial misalignments. Up to now, only a very few investigations on the spherical gear. Yang et al. [10,11] proposed a ring-involute-teeth spherical gear with double degrees of freedom. Tsai and Jehng [12] applied rapid prototyping to form a spherical gear with skew axes.

The aim of this paper is to develop the mathematical models of spherical gears with convex tooth and concave tooth. Based on these developed mathematical models, the TCA is performed. The instantaneous contact points and kinematic errors of the spherical gear can be calculated. In addition, the contact pattern of spherical sets can also be determined.

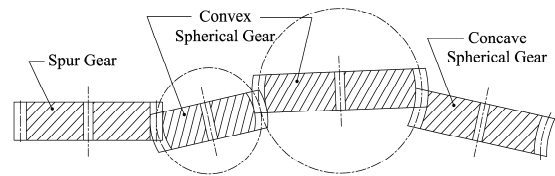


Fig. 1. Mating statuses of spherical gear set with axial misalignments

### II. Mathematical Model of Spherical Gears

There are many manufacture methods for gear generation. Hobbing is a common and efficient way to cut gears. Hobbing method can be applied to cut spur gears, helical gears, bevel gears, etc. It also can be used to cut the spur gear with continuous shifting such as spherical gears. Therefore, an imaginary rack cutter is considered to simulate the hob cutter. According to the theory of gearing [5-7] and the gear cutting mechanism, the mathematical model of spherical gears can be developed.

#### A. Mathematical model of rack cutter

The spherical gear pair for the meshing simulation comprises a pinion and a gear. Assume that the rack cutter surfaces  $\Sigma_F$  and  $\Sigma_P$  generate the pinion surface  $\Sigma_1$  and gear surface  $\Sigma_2$ , respectively. According to Figure 2, the normal section of rack cutter consists mainly of two straight edges. Therefore, the mathematical model of these two straight edges can be represented in coordinate system  $S_a^{(i)}(X_a^{(i)}, Y_a^{(i)}, Z_a^{(i)})$  by

$$\mathbf{R}_a^{(i)} = \begin{bmatrix} -a + \ell_i \cos \alpha_n \\ \mp (b + a \tan \alpha_n) \pm \ell_i \sin \alpha_n \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

<sup>\*</sup>E-mail: jackicy@so-net.net.tw

<sup>+</sup>Corresponding author, E-mail: cbtsay@mail.nctu.edu.tw

where the design parameter  $\ell_i = |\overline{M_0 M}|$  ( $i=F$  and  $P$ ) represents the distance between the initial point  $M_0$  and the moving point  $M$ ; the symbols  $M_n$  and  $\alpha_n$  denote the normal module and normal pressure angle of spherical gears, respectively. The upper and lower signs of Eq. (1) represent the cutter surface equation of the left side and right side on rack cutter  $\Sigma_i$  ( $i=F$  and  $P$ ), respectively.

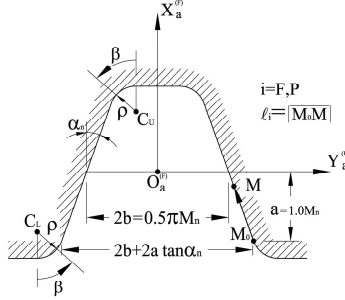


Fig. 2. The normal section of rack cutters  $\Sigma_F$  and  $\Sigma_P$

Consider that the coordinate system  $S_c^{(i)}(X_c^{(i)}, Y_c^{(i)}, Z_c^{(i)})$  represents the hobbing locus of the hob cutter for the generation of a spherical gear, as shown in Figure 3. The mathematical model of rack cutter can be determined by using the homogenous coordinate transformation matrix equation transforming from coordinate system  $S_a^{(i)}$  to  $S_c^{(i)}$ . It's also the locus equation of normal section of rack cutter represented in coordinate system  $S_c^{(i)}$ . Therefore, the rack cutter surface can be represented in coordinate system  $S_c^{(i)}$  as follows:

$$\mathbf{R}_c^{(i)} = \mathbf{M}_{ca} \mathbf{R}_a^{(i)} = \begin{bmatrix} -a + \ell_i \cos \alpha_n - R_j (1 - \cos \theta_j) \\ \mp (b + a \tan \alpha_n) \pm \ell_i \sin \alpha_n \\ R_j \sin \theta_j \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

where the symbols  $R_j$  and  $\theta_j$  ( $j=1, 2$ ) represent the spherical radii and spherical angles, respectively. The upper and lower signs of Eq.(2) represent the cutter surface equations of the left and right sides of the rack cutter.

The unit normal to the rack cutter surface can be attained by

$$\mathbf{n}_c^{(i)} = \frac{\mathbf{N}_c^{(i)}}{|\mathbf{N}_c^{(i)}|}, \quad (3)$$

where

$$\mathbf{N}_c^{(i)} = \frac{\partial \mathbf{R}_c^{(i)}}{\partial \ell_i} \times \frac{\partial \mathbf{R}_c^{(i)}}{\partial \theta_j}, \quad (4)$$

and parameters  $\ell_i$  and  $\theta_j$  are the surface coordinates of the rack cutter. Equations (2)-(4) result in the corresponding unit normal vector to the rack cutter surface as follows:

$$\mathbf{n}_c^{(i)} = \frac{1}{(\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_n \sin^2 \theta_j})} \begin{bmatrix} \pm \sin \alpha_n \cos \theta_j \\ -\cos \alpha_n \cos \theta_j \\ \pm \sin \alpha_n \sin \theta_j \end{bmatrix}, \quad (5)$$

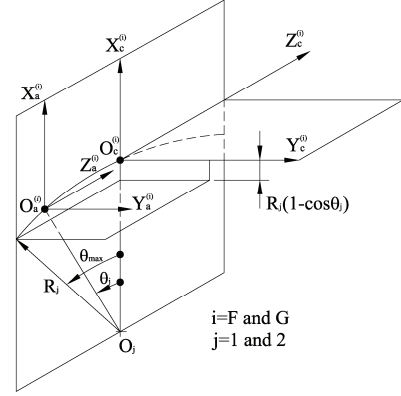


Fig. 3. Relationship between coordinate systems  $S_a^{(i)}$  and  $S_c^{(i)}$

### B. Mathematical model of spherical gear

Figure 4 shows the schematic generation mechanism and the coordinate relationship among the rack cutter and the generated pinion and gear. Herein, coordinate systems  $S_c^{(i)}(X_c^{(i)}, Y_c^{(i)}, Z_c^{(i)})$ ,  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ ,  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  and  $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$  are attached to the rack cutter, fixed, pinion and gear coordinate systems, respectively. In the generation process, the rack cutter translates to the left with a velocity  $\mathbf{V}$  while the pinion rotates with an angular velocity  $\omega_1$  and the gear rotates with an angular velocity  $\omega_2$ , respectively. According to the theory of gearing [5-7], the plane axode, pinion axode and gear axode roll over each other without sliding on the instantaneous axis I-I. Therefore, the mathematical model of spherical pinion can be expressed in coordinate system  $S_1$  as follows:

$$f_1(\ell_F, \theta_1, \phi_1) = [r_1 \phi_1 \pm (b + a \tan \alpha_n) \mp \ell_F \sin \alpha_n] \sin \alpha_n - [a - \ell_F \cos \alpha_n + R_1 (1 - \cos \theta_1)] \cos \alpha_n = 0, \quad (6)$$

and

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{M}_{1c} \mathbf{R}_c^{(F)}. \quad (7)$$

The unit normal vector of the generated pinion can be obtained by

$$\mathbf{n}_1^{(F)} = \mathbf{L}_{1c} \mathbf{n}_c^{(F)}. \quad (8)$$

It is noted that Eq.(6) is the equation of meshing and Eq.(7) represents the locus of rack cutter surface  $\Sigma_F$  expressed in the pinion coordinate system.

Similarly, by using another rack cutter surface  $\Sigma_P$  and the same generation mechanism, the mathematical model of the generated gear can also be obtained as follows:

$$f_2(\ell_P, \theta_2, \phi_2) = [\mp (b + a \tan \alpha_n) \pm \ell_P \sin \alpha_n - r_2 \phi_2] \sin \alpha_n - [a - \ell_P \cos \alpha_n + R_2 (1 - \cos \theta_2)] \cos \alpha_n = 0, \quad (9)$$

and

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{M}_{2c} \mathbf{R}_c^{(P)}. \quad (10)$$

The unit normal vector of the generated gear also can be obtained by

$$\mathbf{n}_2^{(P)} = \mathbf{L}_{2c} \mathbf{n}_c^{(P)}. \quad (11)$$

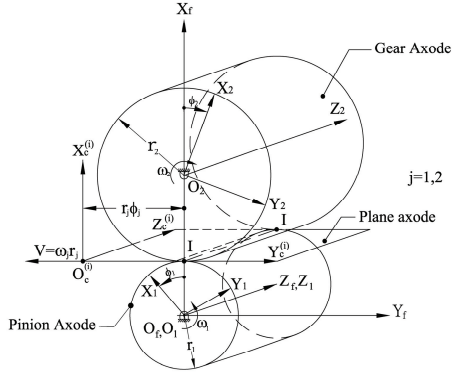


Fig. 4. Coordinate system relationship among rack cutter and generated gears

Again, Eqs.(6) and (7) represent the mathematical model of the pinion, and Eqs.(9) and (10) express the gear. The pinion and gear are the spherical gears with convex and concave teeth, respectively.

### III. Meshing Model and Tooth Contact Analysis

In general, gear sets are important machine elements for power transmissions. The profile and assembly errors are two important factors that effect the gear transmission performance. The profile errors include the errors of pressure angle, lead angle, tooth profile, etc. These errors relate to the manufacture of gears. Therefore, improving the precision of manufacture is very important to increase the gear transmission performance. Another important factor that effects the transmission performance of the gear set is assembly errors. Assembly errors include the errors of center distance, vertical axial misalignment and horizontal axial misalignment. In this study, the influence of assembly errors on transmission performance is investigated.

#### A. Meshing Model of spherical gear set

Figure 5 shows that the pinion and gear are meshed with assembly errors. The gear set can be simulated by changing the setting of coordinate systems  $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$  and  $S_v(X_v, Y_v, Z_v)$  with respect to the fixed coordinate system  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ . Coordinate systems  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  and  $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$  are attached to the pinion and gear, respectively. When the gear set is meshed with each other,  $\phi'_1$  and  $\phi'_2$  are the actual rotation angles of the pinion and gear, respectively. To simulate the horizontal axial misalignment of pinion, it can be performed by rotating the coordinate system  $S_h$  about axis  $X_h$  through a misaligned angle  $\Delta\gamma_h$ . Similarly, the vertical axial misalignment of pinion can be achieved by rotating the coordinate system  $S_v$  about axis  $X_v$  through a setting angle  $\Delta\gamma_v$ . In addition, the error of center distance of spherical set can be performed by moving the coordinate system  $S_2$  along axis  $X_f$  with a distance  $\Delta C$ . Where the symbols  $\Delta\gamma_h$ ,  $\Delta\gamma_v$  and  $\Delta C$

represent the horizontal axial-misaligned angle, vertical axial-misaligned angle and error of center distance of the gear set, respectively.

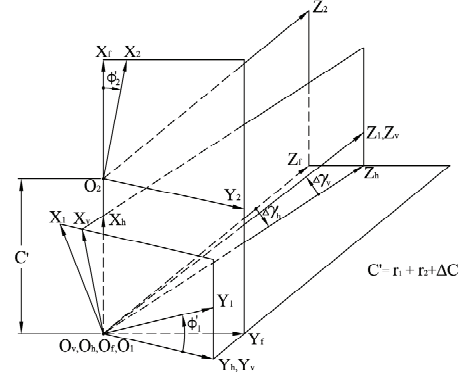


Fig. 5. Spherical gear set of pinion and gear with assembly errors

#### B. Tooth Contact Analysis of spherical gear set

According to the tooth contact analysis method [1,5-7], the position vectors and the unit normal vectors of both pinion and gear should be represented in the same coordinate system, say  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ . The common contact point of pinion and gear is indeed the same point expressed in coordinate system  $S_f$ . Moreover, the unit normal vectors of the pinion and gear must be collinear to each other. Therefore, the following equations must hold at the point of tangency of the mating gear pair:

$$\mathbf{R}_f^{(1)} - \mathbf{R}_f^{(2)} = 0 \quad (12)$$

and

$$\mathbf{n}_f^{(1)} \times \mathbf{n}_f^{(2)} = 0, \quad (13)$$

where  $\mathbf{R}_f^{(1)}$  and  $\mathbf{R}_f^{(2)}$  represent the position vectors of the pinion and gear, while  $\mathbf{n}_f^{(1)}$  and  $\mathbf{n}_f^{(2)}$  are the unit normal vectors, respectively, represented in coordinate system  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ . Since  $|\mathbf{n}_f^{(1)}| = |\mathbf{n}_f^{(2)}| = 1$ , Eqs. (12) and (13) yield a system of five independent nonlinear equations with six independent parameters  $\phi'_1$ ,  $\phi'_2$ ,  $\ell_F$ ,  $\ell_P$ ,  $\theta_1$  and  $\theta_2$ . If the input rotation angle  $\phi'_1$  of the pinion is known, other five independent parameters can be solved by using nonlinear solver.

The kinematic error (KE) of the spherical gear set can be calculated by applying the following equation:

$$\Delta\phi_2(\phi'_1) = \phi'_2(\phi'_1) - \frac{T_1}{T_2} \phi'_1, \quad (14)$$

where  $T_1$  and  $T_2$  denote the number of teeth of pinion and gear, respectively.

### IV. Contact pattern

When gear drives transmit the power or motion, the elastic deformation of the gear surface is occurred near the contact points. This elastic deformation zone is usually called the contact pattern or contact ellipse. The methods of contact pattern analysis can be classified into the elastic

body and the rigid body. The elastic contact pattern method can use the finite element method (FEM) to analyze the contact ellipse with elastic deformation, including mechanical property of material, coefficient of friction of the gear surface, temperature, loading, etc. On the other way, the curvature analysis method [5-7] and surface separation topology method [8] are two approaches to investigate the rigid body contact pattern.

In this study, the contact patterns of spherical gear set are obtained by using the surface separation topology method. According to the surface separation topology method [8], the tooth surfaces of pinion and gear must be transformed to the coordinate system  $S_t(X_t, Y_t, Z_t)$  which is attached to the common tangent plane of two contact tooth surfaces. Figure 6 shows the relationship between the fixed coordinate system  $S_f$  and the common tangent plane coordinate system  $S_t$ . The coordinate system  $S_m(X_m, Y_m, Z_m)$  and  $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$  are the auxiliary coordinate systems and they are rotated about the axes  $X_m$  and  $Y_n$  through the angles  $\delta$  and  $\varepsilon$ , respectively. The position vectors of tooth surfaces of pinion and gear, represented in coordinate system  $S_t$ , can be expressed by

$$\mathbf{R}_t^{(k)} = \mathbf{M}_{tf} \mathbf{R}_f^{(k)} \quad (k=1,2), \quad (15)$$

where the angles formed between axes  $Z_m$  and  $Z_n$ , and between axes  $Z_n$  and  $Z_t$  are  $\delta = \tan^{-1}\left(\frac{n_y}{n_z}\right)$  and

$$\varepsilon = \tan^{-1}\left(\frac{n_x}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}}\right), \text{ respectively. Moreover, symbols}$$

$p_x$ ,  $p_y$  and  $p_z$  are the components of the position vector of common contact point  $O_t$  represented in coordinate system  $S_f$ .

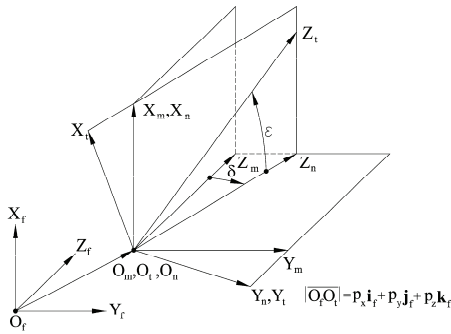


Fig. 6. Coordinate system relationship of contact point and tangent plane

Figure 7(a) shows the contact tooth surfaces of pinion  $\Sigma_1$  and gear  $\Sigma_2$  which tangent to each other at their instantaneous contact point  $O_t$ . The position of common contact point  $O_t$  can be determined by TCA computation. Herein, the unit normal vector  $\mathbf{n}$  represents the unit normal vector of pinion  $\Sigma_1$  represented in coordinate system  $S_t$  and coincides with the  $Z_t$  axis. The symbol  $r$  is the radius of the contact pattern at the corresponding polar coordinate  $\theta_t$  expressed in the coordinate system  $S_t$ . The value of radius  $r$  must satisfy the separation distance (i.e.  $d_1+d_2$ ) between the pinion surface  $\Sigma_1$  and gear surface

$\Sigma_2$  along  $Z_t$  direction is equal to the diameter of coating paint as shown in Figure 7(b). The diameter of testing coating paint is 0.00632 mm. Therefore, the contact pattern can be determined by applying the following equations:

$$X_t^{(1)} = X_t^{(2)}, \quad (16)$$

$$Y_t^{(1)} = Y_t^{(2)}, \quad (17)$$

$$\tan(\theta_t) = \frac{Y_t^{(1)}}{X_t^{(1)}} = \frac{Y_t^{(2)}}{X_t^{(2)}} \quad (-\pi \leq \theta_t \leq \pi), \quad (18)$$

$$\text{and} \quad |Z_t^{(1)} - Z_t^{(2)}| = 0.00632 \text{ mm}. \quad (19)$$

Thus, the positions and sizes of contact ellipses of the spherical gear set can be determined by using Eqs. (16)-(19).

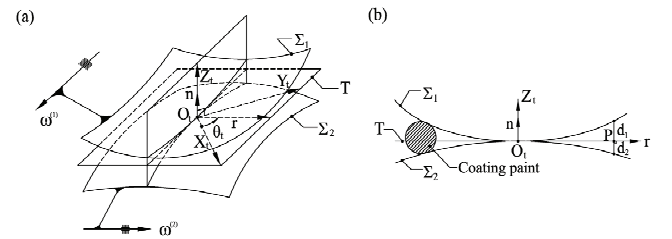


Fig. 7. (a) Common tangent plane and polar coordinates. (b) Separation distance between pinion and gear surfaces

## V. Numerical examples

Based on the mathematical model of the spherical gears and the meshing model, the computer simulations of spherical gear sets can be performed.

Type of gears	Pinion	Gear		Spur
	Spherical convex	Spherical concave	Spherical convex	
Normal module (mm/teeth)	3	3	3	3
Normal pressure angle (deg.)	25	25	25	25
Number of teeth	18	36	36	36
Spherical angle (deg.)	16.128	7.984	7.984	-
Face width (mm)	15	15	15	15

TABLE I. Design parameters of spherical pinion and gear

### Example 1. Convex spherical pinion vs. concave spherical gear

The major parameters of spherical gear are given in TABLE I. The gear pair is composed of convex spherical pinion and concave spherical gear, mounted with three assembly conditions as follows:

Case 1:  $\Delta\gamma_h = \Delta\gamma_v = 0^\circ$  and  $\Delta C = 0 \text{ mm}$

Case 2:  $\Delta\gamma_h = \Delta\gamma_v = 0^\circ$  and  $\Delta C = 0.2 \text{ mm}$

Case 3:  $\Delta\gamma_h = -0.5^\circ$ ,  $\Delta\gamma_v = 2.0^\circ$  and  $\Delta C = 0.2 \text{ mm}$

Case 1 is the ideal assembly condition. Case 2 indicates that the gear set has the error of center distance (0.25% center distance). Case 3 indicates that the gear set has both the axial misalignments and error of center distance (0.25% center distance). The simulated kinematic errors



(KEs) and bearing contacts of these cases are shown in TABLE II. In the ideal assembly condition (Case 1), the gear set has no KE and tooth surfaces contact to each other at the central region of face width. In the Case 2, the gear pair also has no KE and they contact to each other at central region of face width. Due to the profiles of central region of spherical pinion and gear are profiles of spur gears with no shifting, therefore, the contact characteristic of central region of spherical gear set is similar to that of spur gears. The only different between spherical gear and spur gear is that the spherical gear set is in point contact and the spur gear is in line contact. Figure 8 illustrates the loci of contact points and their corresponding contact patterns on the pinion surface for the above-mentioned three cases. The positions of contact patterns of spherical gear set with axial misalignments and assembly errors of center distance (Case 3) are dislocated by still near the central region of face width.

Case	$\phi_1$ (deg.)	$\phi_2$ (deg.)	$\ell_x$ (mm)	$\ell_y$ (mm)	$\theta_1$ (deg.)	$\theta_2$ (deg.)	K.E.(arc-sec)
1	-8.0000	-4.0000	2.7127	2.7127	0.0000	0.0000	0.0000
	-4.0000	-2.0000	3.5093	3.5093	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	4.3059	4.3059	0.0000	0.0000	0.0000
	4.0000	2.0000	5.1025	5.1025	0.0000	0.0000	0.0000
	8.0000	4.0000	5.8991	5.8991	0.0000	0.0000	0.0000
2	-8.0000	-4.0000	2.7726	2.5532	0.0000	0.0000	0.0000
	-4.0000	-2.0000	3.5692	3.3498	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	4.3658	4.1464	0.0000	0.0000	0.0000
	4.0000	2.0000	5.1625	4.9430	0.0000	0.0000	0.0000
	8.0000	4.0000	5.9591	5.7396	0.0000	0.0000	0.0000
3	-8.0000	-3.9983	2.8187	2.5893	4.2165	1.1358	6.2825
	-4.0000	-1.9991	3.6137	3.3827	4.1354	1.0541	3.0921
	0.0000	0.0000	4.4088	4.1762	4.0542	0.9723	0.0000
	4.0000	1.9992	5.2039	4.9699	3.9730	0.8904	-2.9935
	8.0000	3.9984	5.9991	5.7637	3.8917	0.8086	-5.8888

TABLE II. Kinematic errors and bearing contacts for spherical gear sets with convex pinion and concave gear

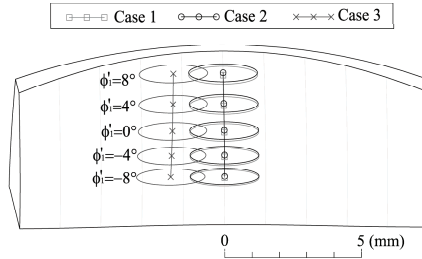


Fig. 8. Contact patterns of spherical gear set with convex pinion and concave gear

#### Example 2. Convex spherical pinion vs. convex spherical gear

The major spherical gear parameters also are shown in TABLE I. This example investigates the meshing simulations of the spherical gear set with convex pinion and convex gear under the following assembly conditions:

Case 4:  $\Delta\gamma_h = \Delta\gamma_v = 0^\circ$  and  $\Delta C = 0\text{mm}$

Case 5:  $\Delta\gamma_h = \Delta\gamma_v = 0^\circ$  and  $\Delta C = 0.2\text{mm}$

Case 6:  $\Delta\gamma_h = -0.5^\circ$ ,  $\Delta\gamma_v = 2.0^\circ$  and  $\Delta C = 0.2\text{mm}$

TABLE III summarizes the simulated results of the bearing contacts and KEs of Cases 4-6, and Figure 9 illustrates the loci of contact points and their corresponding contact patterns on the pinion surface. In Case 4 and Case 5, the KEs keep zero and the loci of

contact patterns remain in the central region of face width. In this example, the size of contact patterns is smaller than former examples.

Case	$\phi_1$ (deg.)	$\phi_2$ (deg.)	$\ell_x$ (mm)	$\ell_y$ (mm)	$\theta_1$ (deg.)	$\theta_2$ (deg.)	K.E.(arc-sec)
4	-8.0000	-4.0000	2.7127	2.7127	0.0000	0.0000	0.0000
	-4.0000	-2.0000	3.5093	3.5093	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	4.3059	4.3059	0.0000	0.0000	0.0000
	4.0000	2.0000	5.1025	5.1025	0.0000	0.0000	0.0000
	8.0000	4.0000	5.8991	5.8991	0.0000	0.0000	0.0000
5	-8.0000	-4.0000	2.7726	2.5532	0.0000	0.0000	0.0000
	-4.0000	-2.0000	3.5692	3.3498	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	4.3658	4.1464	0.0000	0.0000	0.0000
	4.0000	2.0000	5.1625	4.9430	0.0000	0.0000	0.0000
	8.0000	4.0000	5.9591	5.7396	0.0000	0.0000	0.0000
6	-8.0000	-3.9992	2.7887	2.5662	2.7059	0.3817	2.8814
	-4.0000	-1.9996	3.5861	3.3624	2.7335	0.3541	1.4574
	0.0000	0.0000	4.3834	4.1586	2.7610	0.3266	0.0000
	4.0000	1.9996	5.1808	4.9547	2.7886	0.2990	-1.4908
	8.0000	3.9992	5.9781	5.7508	2.8161	0.2715	-3.0150

TABLE III. Kinematic errors and bearing contacts for spherical gear sets with convex pinion and gear

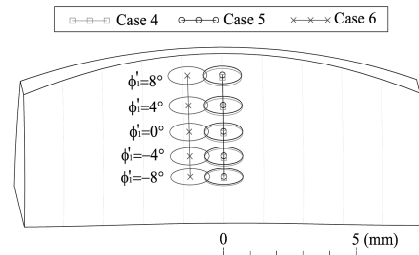


Fig. 9. Contact patterns of spherical gear set with convex pinion and gear

#### Example 3. A gear set with convex spherical pinion and spur gear

The major gear parameters are also given in TABLE I. This example investigates the meshing simulations of the gear set with convex spherical pinion and spur gear under the following assembly conditions:

Case 7:  $\Delta\gamma_h = \Delta\gamma_v = 0^\circ$  and  $\Delta C = 0\text{mm}$

Case 8:  $\Delta\gamma_h = \Delta\gamma_v = 0^\circ$  and  $\Delta C = 0.2\text{mm}$

Case 9:  $\Delta\gamma_h = -0.5^\circ$ ,  $\Delta\gamma_v = 2.0^\circ$  and  $\Delta C = 0.2\text{mm}$

TABLE IV summarizes the simulated results of the bearing contacts and KEs of Cases 7-9, and Figure 10 illustrates the loci of contact points and their corresponding contact patterns on the pinion surface. Case 9 has a little higher level of KEs than other examples under the assembly condition with axial misalignments.

Case	$\phi_1$ (deg.)	$\phi_2$ (deg.)	$\ell_x$ (mm)	$\ell_y$ (mm)	$\theta_1$ (deg.)	$\theta_2$ (deg.)	K.E.(arc-sec)
7	-8.0000	-4.0000	2.7127	2.7127	0.0000	0.0000	0.0000
	-4.0000	-2.0000	3.5093	3.5093	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	4.3059	4.3059	0.0000	0.0000	0.0000
	4.0000	2.0000	5.1025	5.1025	0.0000	0.0000	0.0000
	8.0000	4.0000	5.8991	5.8991	0.0000	0.0000	0.0000
8	-8.0000	-4.0000	2.7726	2.5532	0.0000	0.0000	0.0000
	-4.0000	-2.0000	3.5692	3.3498	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	4.3658	4.1464	0.0000	0.0000	0.0000
	4.0000	2.0000	5.1625	4.9430	0.0000	0.0000	0.0000
	8.0000	4.0000	5.9591	5.7396	0.0000	0.0000	0.0000
9	-8.0000	-3.9990	2.7947	2.5704	3.0862	0.5387	3.7371
	-4.0000	-1.9995	3.5917	3.3661	3.0863	0.4998	1.8686
	0.0000	0.0000	4.3886	4.1618	3.0864	0.4610	0.0000
	4.0000	1.9995	5.1856	4.9575	3.0865	0.4221	-1.8688
	8.0000	3.9990	5.9826	5.7532	3.0867	0.3832	-3.7377

TABLE IV. Kinematic errors and bearing contacts for spherical gear sets with convex pinion and spur gear

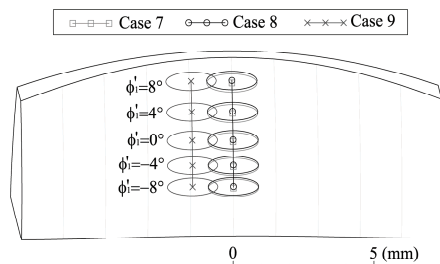


Fig. 10. Contact patterns of a gear set with spherical convex pinion and spur gear

#### Example 4. Average ratio $a/b$ of major and minor axes of the contact ellipses

The major gear parameters are also the same as those given in TABLE I. This example investigates the average ratio  $a/b$  of major and minor axes of contact patterns when gear pair with different tooth pressure angles under the ideal assembly condition and having axial misalignments without center distance variation.

Case 10:  $\Delta\gamma_h = \Delta\gamma_v = 0^\circ$  (ideal assembly condition)

Case 11:  $\Delta\gamma_h = -0.5^\circ$ ,  $\Delta\gamma_v = 2.0^\circ$

TABLE V shows the ratio  $a/b$  of major and minor axes of the contact ellipses of the spherical gear set with different tooth pressure angles. It is found that convex pinion meshes with concave gear has a larger ratio of  $a/b$  than other mating conditions. Due to the curvature centers are located on the same direction for the case of convex pinion mating with concave gear, the separation distance between pinion surface  $\Sigma_1$  and gear surface  $\Sigma_2$  is smaller than other mating conditions. Therefore, the ratio of  $a/b$  in this mating condition is larger than others. Moreover, the gear set with a smaller pressure angle ( $14.5^\circ$ ) results in a larger ratio of  $a/b$  than other pressure angle conditions.

Pressure angle(deg.)	14.5	20.0	25.0
Convex pinion vs. concave gear			
Case 10	7.334	5.142	4.123
Case 11	7.229	5.122	4.103
Convex pinion vs. convex gear			
Case 10	4.240	2.971	2.379
Case 11	4.215	2.970	2.377
Convex pinion vs. spur gear			
Case 10	5.191	3.641	2.918
Case 11	5.162	3.632	2.909

TABLE V. Average ratio  $a/b$  of major and minor axes of the contact patterns of spherical gear sets with different tooth pressure angles

## VI. Conclusions

In this study, the continuous shifting during gear cutting is adopted to generate the spherical gears. The continuously positive shifting and then negative shifting gear cutting can generate the concave spherical gear, and in the reverse order can generate the convex spherical gear. Based on the developed mathematical model of spherical gears, the simulated results can be concluded by:

1. The meshing spherical gear set is in point contact, and the contact points of the spherical gear set with axial misalignments locate near the central region of tooth

surfaces. It means that there is no edge contact occurred for the spherical gear set with axial misalignments. Besides, the locations and sizes of contact patterns of the spherical gear set can be determined. The results are useful to further investigations on the contact characteristic of spherical gear sets.

2. If a spherical gear set is the convex tooth mating with concave tooth, their curvature centers will locate on the same direction of tangent plane. However, if the spherical gear set is the convex tooth mating with convex tooth, their curvature centers are located in the opposite direction of tangent plane. A spherical gear set with convex tooth mating with concave tooth has the largest size of contact patterns, and then the convex tooth mating with spur tooth. The convex tooth mating with convex tooth has the smallest size of contact patterns.
3. A spherical gear having a smaller pressure angle (i.e.  $14.5^\circ$ ) results in a smaller kinematic error and a larger ratio of  $a/b$ , whereas a larger pressure angle (i.e.  $25.0^\circ$ ) results in a larger kinematic error and a smaller ratio  $a/b$ .

## Acknowledgements

The authors are grateful to the National Science Council of the ROC for the grant. Part of this work was supported under contract No. NSC 94-2212-E-009-028.

## References

- [1] Tsay C. B. Helical gears with involute shaped teeth: geometry, computer simulation, tooth contact analysis, and stress analysis. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 110:482-491, 1988.
- [2] Liu C. C., and Tsay C. B. Contact characteristic of beveloid gears. *Mechanism and Machine Theory*, 37:333-350, 2002.
- [3] Tsai Y. C., and Chin P. C. Surface geometry of straight and spiral bevel gears. *Journal of Mechanism, Transmissions and Automation in Design*, 109:443-449, 1987.
- [4] Litvin F. L., Fuentes A., and Hayasaka K. Design, Manufacture, stress analysis, and experimental tests of low-noise high endurance spiral bevel gears. *Mechanism and Machine Theory*, 41:83-118, 2006.
- [5] Litvin F. L. *Theory of Gearing*. NASA Reference Publication 1212, Washington, DC, 1989.
- [6] Litvin F. L. *Gear Geometry and Applied Theory*. PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.
- [7] Litvin F. L., and Fuentes A. *Gear Geometry and Applied Theory*. (2<sup>nd</sup> edition) Cambridge university press, 2004.
- [8] Janninck W. K. Contact surface topology of worm gear teeth. *Gear Technology*, pages 31-47, March/April 1988.
- [9] Mitome K., Okuda T., Ohmachi T., and Yamazaki T. Develop of a new hobbing of spherical gear. *Journal of JSME*, 66:1975-1980, 2000.
- [10] Yang S. C. Mathematical model of a ring-involute-teeth spherical gear with a double degree of freedom. *Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 20:865-870, 2002.
- [11] Yang S. C. A geometric model of a spherical gear with a double degree of freedom. *Journal of Material Processing Technology*, 123:219-224, 2002.
- [12] Tsai Y. C., and Jehng W. K. Rapid prototyping and manufacturing technology applied to the forming of spherical gear sets with skew axes. *Journal of Materials Processing Technology*, 95:169-179, 1999.