

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

曲線齒輪之齒形修整研究 研究成果報告(精簡版)

計畫類別：個別型
計畫編號：NSC 97-2218-E-008-012-
執行期間：97年10月01日至98年07月31日
執行單位：國立中央大學機械工程學系

計畫主持人：陳怡呈

計畫參與人員：碩士班研究生-兼任助理人員：古鳴倫
碩士班研究生-兼任助理人員：游家麒
碩士班研究生-兼任助理人員：蘇加訓

處理方式：本計畫涉及專利或其他智慧財產權，2年後可公開查詢

中 華 民 國 98 年 10 月 26 日

曲線齒輪之齒型修整研究

計畫類別：☒ 個別型計畫 ☐ 整合型計畫

計畫編號：NSC — 97—2218—E—008—012—

執行期間： 97 年 10 月 1 日至 98 年 7 月 31 日

計畫主持人：陳怡呈

共同主持人：

計畫參與人員：古鳴倫、蘇加訓、游家麒

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)：☒ 精簡報告 ☐ 完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：

- ☐ 赴國外出差或研習心得報告一份
- ☐ 赴大陸地區出差或研習心得報告一份
- ☐ 出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
- ☐ 國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、
列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢

☒ 涉及專利或其他智慧財產權，☐ 一年 ☒ 二年後可公開查詢

執行單位：國立中央大學機械系

中 華 民 國 98 年 10 月 26 日

中文摘要

關鍵詞：曲線齒輪，微分幾何，齒形修整，運動誤差，齒形過切

曲線齒圓柱型齒輪 (Curvilinear Cylindrical Gears，以下簡稱為曲線齒輪)與正齒輪及螺旋齒輪相比，具有較高的彎曲強度與抗壓強度。曲線齒輪之齒面有利於潤滑油殘留，故有較佳之潤滑性，而且沒有螺旋齒輪的軸向推力問題，所以十分適用於高負載及精密的平行軸傳動。近年來雖有學者進行曲線齒輪之研究，但大多數的研究是針對直邊刀具所創成之曲線齒輪，其最大的問題在於當有軸向裝配誤差存在時，一般之曲線齒輪組將會有不連續的運動誤差(Discontinuous Kinematic Error)產生，或是造成高接觸應力的齒緣接觸(Edge Contact)現象。

為了解決上述問題，本研究計畫提出具齒形修整之曲線齒輪，使用具圓弧狀法向剖面之刀具，對所創成之曲線齒輪將造成齒形修整效果。當使用此新型曲線齒輪在曲線齒輪對之傳動時，會產生連續性拋物線形的運動誤差(Parabolic-Shaped Kinematic Error)效果，且接觸點將落於齒面中央區域，即使在齒輪組存在軸向裝配誤差之下，也不會產生齒緣接觸或是不連續的運動落差，可大幅提升齒輪組之壽命並降低振動與噪音，此為本研究之最大貢獻之處。

本專題研究計畫為一年期之研究計畫，首先依據具圓弧狀法向剖面之刀具與曲線齒輪的實際切削機構，建立三維假想齒條刀的刀面數學模式；然後，基於齒輪原理及微分幾何的觀念，推導出具齒形修整之曲線齒輪的齒面幾何數學模式。通常在較小之壓力角或是小齒數情況下，很容易在被創成齒面產生過切(Undercutting)現象，造成齒根應力集中並降低接觸率。因此，本計畫將利用所建立之齒面數學模式，進一步推導出發生齒面過切的條件式，計算在創成時齒面發生奇異點的位置，也就是具齒形修整之曲線齒輪齒面上的過切線，並探討在不同設計參數下避免發生齒面過切的情況。最後，本研究實際切製所提出之具齒形修整的曲線齒輪，與先前推導之理論齒面數學模式互相驗證，以提供工業界實際製造時機器與刀具參數選定之參考依據。

本研究計畫所發展出之數學模式亦可以作為未來針對具齒形修整之曲線齒輪組之齒面接觸分析、接觸率計算、曲率分析、接觸橢圓以及有限元素分析等相關後續研究之基礎。

Abstract

Keywords: Curvilinear Gears, Differential Geometry, Tooth Modification, Kinematic Error, Tooth Undercutting

Compared with spur gears and helical gears, curvilinear cylindrical gears have better bending strength and contact strength. The tooth profiles of curvilinear gears are advantageous for retaining lubrication oil, and unlike helical gears, curvilinear gears do not exert axial thrust load. Therefore curvilinear gears are very suitable for precise parallel-axes transmission with high loading. Although there are a few research about this type of gears, most of these research focused on curvilinear gears generated by straight-edged cutters. When there are axial misalignments, conventional curvilinear gear sets will have problems such as discontinuous kinematic errors or edge contact with extremely high contact stress.

To solve the above mentioned problems, this research project proposes a new type of curvilinear gears with tooth modifications which are generated by tools with circular-arc normal sections. When utilizing this new type of curvilinear gears, it will introduce inherent continuous parabolic-shaped kinematic errors and localized bearing contact in the middle of gear tooth. Consequently, neither edge contact nor discontinuous kinematic errors will occur even under axial misalignments. The service lives of the curvilinear gear sets will increase, and the vibrations and noises will be reduced. These are the main contributions of this proposed research.

This research project is a one year project. First, the mathematical model of an imaginary three-dimensional rack cutter will be derived according to the cutter with circular-arc normal section and the practical cutting mechanisms of curvilinear gears. Then, the mathematical model of curvilinear gears with tooth modifications can be derived based on the theory of gearing and differential geometry. Generally, tooth undercutting will occur under small gear teeth number or small pressure angles. Therefore, using the derived mathematical model, this project will derive the equations of tooth undercutting and also calculate the positions of singular points on the generated gear tooth profiles. Computer programs will also be developed according to the derived mathematical equations, and these will be very helpful for gear engineers. Finally, we also manufactured the proposed curvilinear gears with tooth modifications to validate the theoretical mathematical models. The results will be very valuable references for the gear manufacture industry.

前言

本專題研究計畫為一年期之研究計畫(97 年 10 月至 98 年 7 月)，係參照修整型曲線齒圓柱型齒輪實際的切削機構及圓弧法向剖面刀具，首先建立具有圓弧齒線之假想齒條刀的刀面數學模式，再應用齒輪原理及微分幾何的觀念，推導出修整型曲線齒輪的齒形幾何數學模式。通常在小齒數或壓力角較小的情況下，被創成齒面很容易產生過切現象，造成齒根應力集中以及接觸率降低。因此，本計畫利用所建立之齒面數學模式，推導其齒面過切發生之條件式，計算求出修整型曲線齒輪齒面上的過切線，並探討在不同設計參數下齒面的過切狀況。

研究目的

正齒輪與螺旋齒輪為廣泛應用於平行軸之傳動齒輪形式，在正常情況下其接觸型態屬於線接觸，但若齒輪組在裝配時存在有軸向偏差(Axial Misalignment)，則正齒輪或螺旋齒輪在嚙合時將會發生齒緣接觸(Edge Contact)的現象，產生的問題包含有接觸應力集中、運轉不平順、振動與噪音等，進而降低齒輪使用壽命。一般而言，螺旋齒輪比正齒輪具有較高的接觸比(Contact Ratio)，故在傳遞運動時較為平順，且可應用在較高轉速之平行軸傳動，但是仍然無法避免裝配時因具有軸向偏差而產生齒緣接觸，而且螺旋齒輪運轉時會有軸向推力(Axial Thrust Force)產生。實務上為了避免齒緣接觸發生，通常會使用隆齒(Crowning)修整的方法，以改變齒輪接觸型式，由線接觸轉變為點接觸，使得齒輪即使組裝時具有軸向偏差，仍然可使得其接觸點落於齒面中央附近之位置。齒輪在製造及組裝時，多少會產生齒形製造誤差及裝配誤差，進而造成齒輪在傳遞運動的過程中的運動誤差(Kinematic Error)。各種標準齒形及其修整齒形在傳遞運動的過程，對於裝配條件及齒形製造誤差之敏感度各不相同，因此所造成的運動誤差亦不同。

在螺旋齒輪之齒形修整研究方面，Litvin [1] 首先提出具有拋物線形運動誤差的齒面修整觀念，以避免齒輪組在裝配誤差下會有不連續的運動誤差產生，並且可將接觸齒印集中在齒面中央區域附近，避免齒緣接觸的發生。Litvin 等人 [1, 2, 3, 4] 利用具有五個自由度的加工機，製造出具齒形修整的新型螺旋齒輪，使其在理想裝配情況下嚙合運轉時會有拋物線形的運動誤差，但是其所提出的齒形修整方法需要多自由度的特殊加工機與特殊刀具才能達成。後來，Litvin 與 Kim [5] 提出利用 CNC 成形磨齒機來加工正齒輪，使之具有拋物線狀的運動誤差曲線。

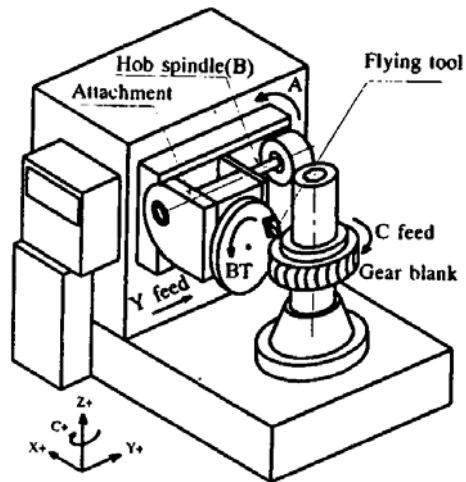
在齒輪組的運動誤差研究方面，Mark [6] 也曾探討螺旋齒輪組之運動誤差的影響因素；Litvin [1, 7]則提出齒面接觸分析(Tooth Contact Analysis, TCA)方法，使用電腦程式來模擬齒輪對的嚙合情況與運動誤差的研究。其後，許多學者廣為利用齒面接觸分析方法，探討各種齒輪組之嚙合傳動的特性[5, 8, 9, 10]。近年來，由於電腦運算速度的提升以及有限元素分析(Finite Element Analysis, FEA)軟體的發展，也有許多學者利用有限元素法來進行齒輪的接觸應力與變形等研究

[10, 11, 12]；此外，Umeyama 等人 [12] 與 Zhang 等人 [13] 更整合齒面接觸分析模擬與有限元素法，對修整型螺旋齒輪組進行負載下齒面接觸分析 (Loaded Tooth Contact Analysis, LTCA) 等相關研究，以得到較接近真實嚙合情況的齒面受力與運動誤差。

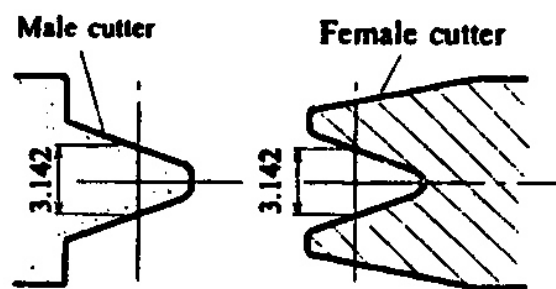
然而以往對於齒面修整之研究大多侷限於純理論之導程方向的隆齒修整，藉以降低齒輪組對於軸向裝配誤差之敏感性，較少從實際製造觀點來探討齒面修整。張等人 [8] 則首次從實際製造觀點，利用傳統滾齒機配合靠模板切削機構，推導出具隆齒效果之螺旋齒輪齒面數學模式，但齒形方向仍為理論漸開線齒形，且在軸向誤差下仍會有不連續的運動誤差產生。針對此一問題，申請人與蔡 [14] 從實際製造之觀點，利用圓弧法向剖面之刀具與具有曲線靠模板機構之齒輪加工機的齒輪創成機構，推導具有齒形修整及隆齒齒面之新式修整型螺旋齒輪，並對此修整型螺旋齒輪對之齒面接觸情形進行電腦模擬其設計參數對齒輪對之運動誤差、接觸率以及接觸齒印的影響 [15, 16]。此修整型齒形與漸開線齒形的誤差，將會使得齒輪在理想裝配情況下嚙合時，會有拋物線狀的運動誤差產生，此拋物線狀的運動誤差將可吸收由軸向裝配誤差所引致之不連續的運動誤差，使得運動誤差曲線得以保持連續。另一方面，刀具沿著靠模板運動造成之導程方向齒形修整，使得齒輪組之接觸齒印保持在齒面中央區域附近，不受裝配誤差的影響，避免齒緣接觸的產生，進而提升齒輪的使用壽命。

與正齒輪及螺旋齒輪相比，曲線齒圓柱型齒輪 (Curvilinear Cylindrical Gears，以下簡稱為曲線齒輪) 具有較高的彎曲強度與抗壓強度，十分適用於傳遞高負載及精密傳動機構；然而，過去國內外關於曲線齒輪之研究十分有限。Liu [17] 於 1988 年從實際製造觀點提出利用刀盤 (Face Mill Cutter) 切削曲線齒輪的製造方法，其提出之曲線齒輪之優點如下：(1) 與相同齒面寬之正齒輪相比，其具有較高的彎曲強度及抗壓強度，故在傳遞相同的動力時，可使齒輪箱尺寸縮小。(2) 齒輪運轉過程中為多齒接觸，故齒輪嚙合平順、噪音較低。(3) 曲線齒輪之凹面有利於潤滑油殘留，故齒輪之潤滑良好。(4) 與螺旋齒輪相比，曲線齒沒有軸向推力之產生。之後，日本東京工業大學的 Dai 等人 [18] 則提出使用一對刀具外形互補之公飛刀 (Male Fly Cutter) 與母飛刀 (Female Fly Cutter)，利用 CNC 滾齒機來分別創成一組共軛之曲線齒輪對之大、小齒輪，其滾齒機加工示意圖與公、母飛刀分別如圖一與圖二所示。Dai 等人並進行此齒輪對接觸特性之探討，發現以互補之公、母飛刀所創成之齒輪對成線接觸，如圖三所示。然而以上對曲線齒輪之研究大多以實務製造觀點來進行探討，且其所製造出的曲線齒輪對在理想狀態下為線接觸，對於組裝或是製造誤差甚為敏感。曾與蔡 [19, 20, 21] 提出具點接觸之曲線齒輪對之數學模式與齒面接觸分析，其中配對之大、小齒輪皆是使用直邊之公飛刀 (Straight-Edged Male Fly Cutter) 所創成，如

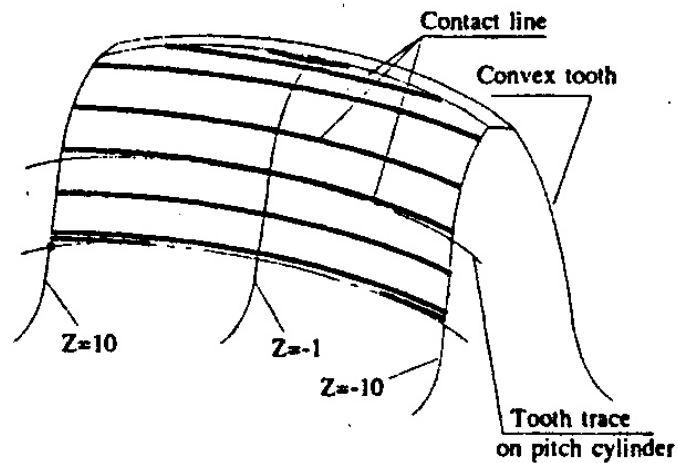
圖四所示。因其左、右齒面分別由不同的刀盤半徑所創成，因此其齒形在導程(或齒面寬)方向具有隆齒(Crowning)之效果，分析結果顯示具有點接觸且接觸點皆落在齒面之中央區域，可以避免在軸向裝配誤差存在之情況下產生齒緣接觸的問題，如圖五所示。



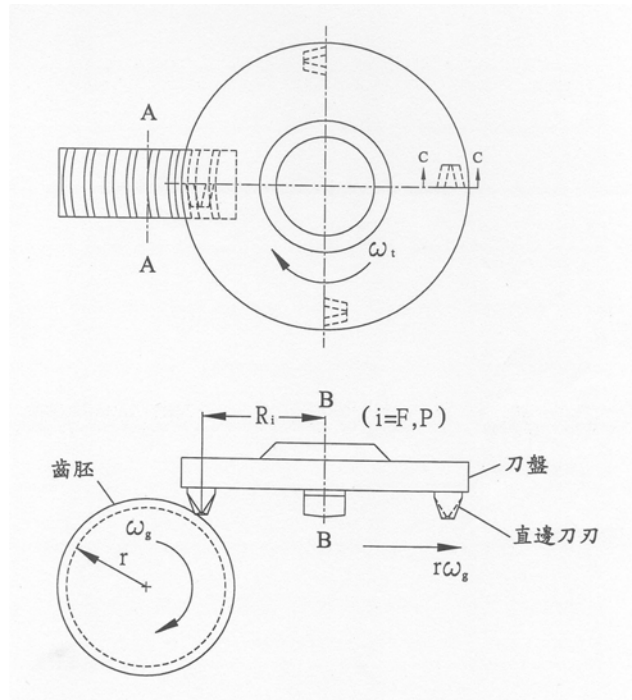
圖一、Dai 等人使用滾齒機創成曲線齒輪示意圖 [18]



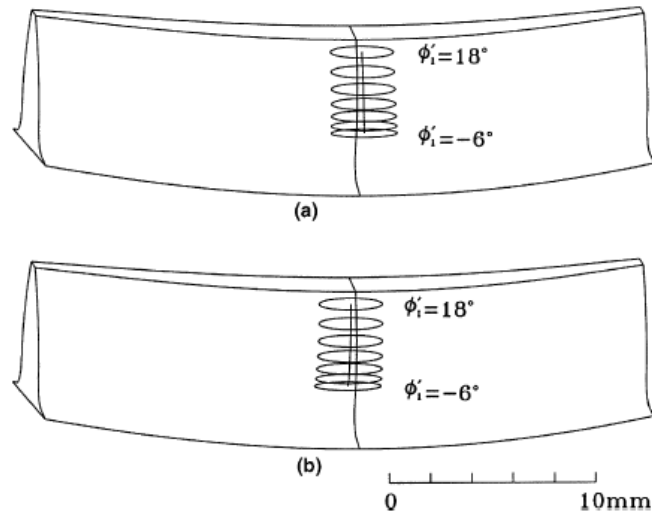
圖二、公、母飛刀截面圖 [18]



圖三、使用互補之公、母飛刀所創成之曲線齒輪對成線接觸 [18]



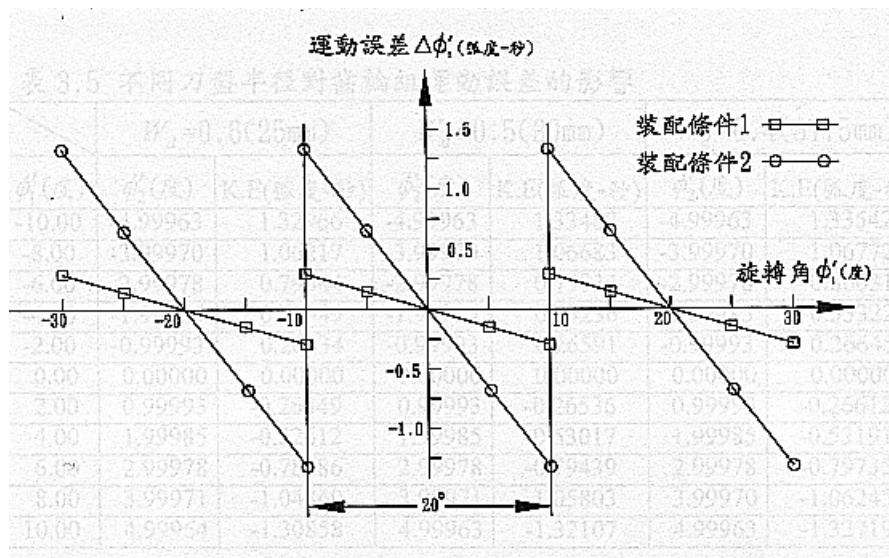
圖四、使用刀盤與直邊公飛刀切削曲線齒輪之示意圖 [19]



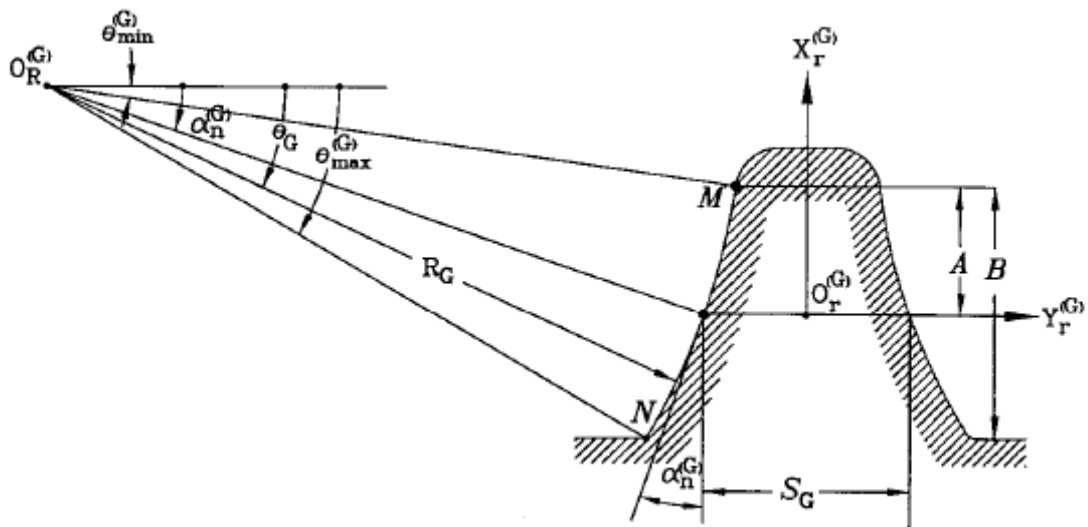
圖五、曾與蔡所提之曲線齒輪對在軸向裝配誤差下之接觸齒印落於齒面中央 [20, 21]

然而，如圖六所示，曾與蔡 [21] 所提出之具有點接觸之曲線齒輪對，在有軸向裝配誤差之情況下，雖然避免了齒緣接觸的發生，但還是存在不連續之運動誤差，以及伴隨而來的運轉振動與噪音。為了改善此問題，本研究計畫提出使用具圓弧狀法向剖面之公飛刀，來創成具有齒形修整之曲線齒輪。首先將建構法向剖面為圓弧形之假想齒條刀，如圖七所示，配合曲線齒輪之實際切削

機構 (如圖四所示)，基於齒輪嚙合原理及微分幾何的觀念，推導所創成具齒形修整之曲線齒輪的齒面數學模式。若將具齒形修整之曲線齒小齒輪，與一般直邊公飛刀所創成之曲線齒圓柱型大齒輪配對，則因小齒輪所具有的齒形方向修整，將使得此曲線齒輪組導入拋物線形之運動誤差，並可吸收由軸向裝配誤差所造成之不連續誤差，使得運動誤差曲線得以保持連續，這也是本研究的創新處。由於此創新之刀具設計與切削方式，具齒形修整之曲線齒輪組在具有軸向裝配誤差之狀況下，才不會產生齒緣接觸與不連續運動誤差等現象，這是對曲線齒輪在應用上之一大改進。



圖六、傳統曲線齒輪在軸向裝配誤差下產生不連續之運動誤差 [20, 21]



圖七、本計畫所提出創成具齒形修整之曲線齒輪的刀具法向剖面圖(圓弧狀取代直邊)

本研究計畫並進一步利用所推導之齒面數學模式，進行具齒形修整之曲線齒輪的齒面過切分析(Tooth Undercutting Analysis)以提供實際製造時刀具參數與切削參數設計之參考。也深入研究具齒形修整之曲線齒輪，在不同刀盤半徑或是刀具法向剖面圓弧半徑等設計參數改變，對所創成齒形修整量所造成之影響，以電腦模擬獲得最佳化之刀具與加工參數設定。除此之外，本計畫亦實際製造具齒形修整之曲線齒輪。

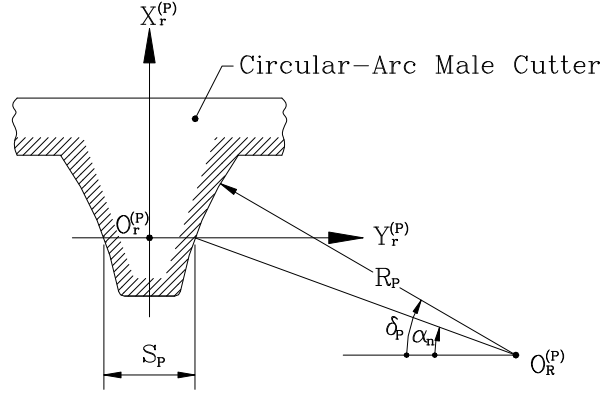
綜上所述，本研究所發展之具齒形修整之曲線齒輪組對於裝配誤差不敏感，且不會發生齒緣接觸與不連續運動誤差等優點，非常適合用於精密傳動與大負荷之場合。本專題研究計畫執行完畢後，已建立起一套具齒形修整之曲線齒輪從設計、分析、模擬、製造及檢測之完整流程，並建立標準化與電腦化之規範，在工業生產彈性及成本上有其優勢，對於提昇我國齒輪業者之設計、製造與競爭能力將大有助益。相信藉由此一研究計畫之推展，將可提高國內業界對具齒形修整之曲線齒輪組之認識並建立其設計與製造能力，有助於齒輪製造業改善其變速箱品質及可靠度，提昇國內精密傳動工業技術，藉此達到產業升級的目的。

此外，基於所推導之齒面數學模式，未來也將可進行齒面接觸分析、曲率分析、接觸橢圓模擬以及接觸應力分析等更深入之研究。因此，此新式齒輪非常值得深入研究，以利產業之實用化並提昇我國之齒輪減速機產業技術和產品水準。

研究方法

本計畫首先設計具有圓弧狀法向剖面之齒輪切削刀具參數，配合切削曲線齒輪之加工機構，推導具有圓弧法向剖面之假想齒條刀的刀面數學模式。齒輪實際製造過程中，刀具與齒胚之間的相對運動可利用座標轉換來模擬計算，再加上齒輪嚙合方程式，即可推導出具齒形修整之曲線齒輪的齒面數學模式。因為在此新型曲線齒輪設計參數中，其模數、壓力角、刀盤半徑、刀具法向剖面圓弧半徑和齒數等的選擇很重要，若齒輪設計參數選取不恰當則容易在齒面上產生過切線，換句話說，在齒面上會有奇異點(Singular Point)產生。本計畫進一步利用刀具與齒胚之間的相對速度與對時間微分的嚙合方程式，推導曲線齒輪產生齒面過切的判別方程式，探討在不同的設計參數下，齒形過切的發生條件，以供選取適

當之刀具參數及加工條件參考。本研究計畫也進行此新式齒輪的試製，同時驗證數學模式的正確性。本計畫所發展出之數學模式亦可以作為未來針對具齒形修整之曲線齒輪對之齒面接觸分析、接觸率計算、曲率分析、接觸齒印模擬以及有限元素分析等相關後續研究之基礎。



圖十、創成修整型曲線齒輪之假想齒條刀之圓弧形法向剖面

先前 Tseng 和 Tsay [19,20] 已使用假想曲線齒條刀概念依據齒輪原理推導曲線齒輪數學模式，其使用同一把直邊公飛刀創成配對之大小齒輪，刀具之刀面寬之中央法向截面與創成漸開線齒輪相似皆是直邊刀具，如圖九所示。本研究基於齒形修整觀念為出發點，將刀具法向剖面由直邊刀具改為圓弧狀，如圖十所示，並稱其為「修整型曲線齒輪」。使用同一刀具創成之大小齒輪所組成之修整型曲線齒輪對，預期其齒面接觸型態為點接觸，而且可望吸收在軸向偏差下產生的不連續狀運動誤差，以改善 Tseng 和 Tsay [19,20] 所提出之曲線齒輪組在軸向偏差下會產生不連續運動誤差的缺點。

1.1 假想齒條刀數學模式

圖十所示為創成修整型曲線齒輪之假想齒條刀其圓弧狀法向剖面，其中 S_p 為刀具法向剖面在節圓上的厚度，在座標系 $S_r^{(P)}(X_r^{(P)}, Y_r^{(P)}, Z_r^{(P)})$ 中，創成齒形的刀具法向剖面圓弧曲線方程式可以表示如下：

$$\begin{aligned} x_r^{(P)} &= R_p (\sin \delta_p - \sin \alpha_n), \\ y_r^{(P)} &= \pm R_p (\cos \delta_p - \cos \alpha_n) \mp \frac{S_p}{2}, \\ z_r^{(P)} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 δ_p 為刀面設計參數且 $\delta_{pl} \leq \delta_p \leq \delta_{pu}$ ， α_n 為法向壓力角， R_p 是圓弧曲線的半徑，當其值越大則越接近直邊刀具。公式(1)中之“ \pm ”符號，上方符號

代表左側刀面，下方符號則代表右側刀面。

圖十一為具圓弧齒線之三維假想齒條刀 Σ_p 的形成示意圖，以及座標系統 $S_c^{(P)}(X_c^{(P)}, Y_c^{(P)}, Z_c^{(P)})$ 與 $S_r^{(P)}(X_r^{(P)}, Y_r^{(P)}, Z_r^{(P)})$ 之間的關係。將 $S_r^{(P)}(X_r^{(P)}, Y_r^{(P)}, Z_r^{(P)})$ 座標系固聯在圖十具圓弧法向剖面刀具之中心，並沿著半徑為 E_p 之圓弧曲線運動，即可在空間中得到三維之假想齒條刀 Σ_p ，用以創成修整型曲線齒輪。參數 E_p 為圓弧齒線之半徑，也是實際創成曲線齒輪時之刀盤旋轉半徑， W 為齒輪之齒面寬。利用齊次座標轉換矩陣(Homogeneous Coordinate Transformation Matrix)可將三維假想齒條刀 Σ_p 之刀面數學式表示在 $S_c^{(P)}(X_c^{(P)}, Y_c^{(P)}, Z_c^{(P)})$ 座標系，其數學方程式經整理後表示如下：

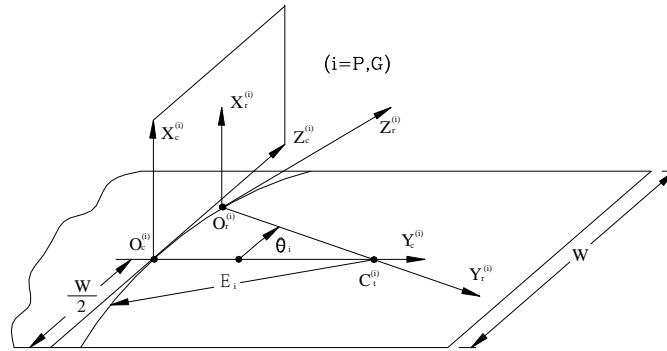
$$x_c^{(P)} = R_p(\sin \delta_p - \sin \alpha_n) ,$$

$$y_c^{(P)} = \pm [R_p(\cos \delta_p - \cos \alpha_n) \mp \frac{S_p}{2}] \cos \theta_p + E_p(1 - \cos \theta_p) , \quad (2)$$

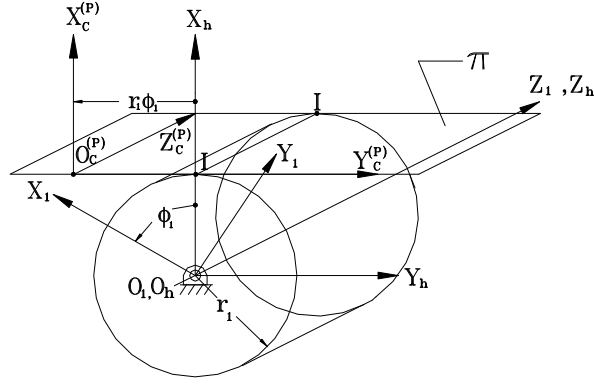
$$\text{和 } z_c^{(P)} = -[\pm R_p(\cos \delta_p - \cos \alpha_n) \mp \frac{S_p}{2}] \sin \theta_p + E_p \sin \theta_p ,$$

其中 θ_p 為齒條刀表面位置參數， $\theta_{pl} \leq \theta_p \leq \theta_{pu}$ ， $\theta_{pl} = \sin^{-1}(\frac{-W}{2E_p})$ 且 $\theta_{pu} = \sin^{-1}(\frac{W}{2E_p})$ 。

方程式(2)中之“ \pm ”符號，上方符號代表左側刀面，下方符號則代表右側刀面。



圖十一、形成三維假想齒條刀之座標系 S_c 與 S_r 的關係



圖十二、假想齒條刀創成修整型曲線齒輪之創成機構示意圖

1.2 修整型曲線齒輪齒面數學模式

圖十二表示使用假想齒條刀創成修整型曲線齒輪時之相對運動與座標系關係，創成時刀具之瞬軸(Axode)向左平移 $r_1\phi_1$ 距離，同時被創成齒輪之齒胚逆時針旋轉角度 ϕ_1 ， r_1 代表齒輪之節圓半徑。圖中 $S_c^{(P)}(X_c^{(P)}, Y_c^{(P)}, Z_c^{(P)})$ 座標系固聯於三維假想齒條刀， $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 座標系則固聯於齒輪之旋轉中心。依據齒輪原理與創成機構，修整型曲線齒輪齒面數學模式可由假想齒條刀 Σ_p 之軌跡方程式經由座標轉換表示於座標系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 後，並與嚙合方程式(Equation of Meshing)聯立而得[1]。方程式分別整理表示如下：

$$\begin{aligned} x_1 &= x_c^{(P)} \cos \phi_1 - y_c^{(P)} \sin \phi_1 + r_1 (\cos \phi_1 + \phi_1 \sin \phi_1) , \\ y_1 &= x_c^{(P)} \sin \phi_1 + y_c^{(P)} \cos \phi_1 + r_1 (\sin \phi_1 - \phi_1 \cos \phi_1) , \\ z_1 &= z_c^{(P)} , \end{aligned} \quad (3)$$

且

$$\begin{aligned} f_1(\phi_1, \theta_p, \delta_p) &= [R_p (\cos \delta_p - \cos \alpha_n) - \frac{S_p}{2}] \cos \theta_p \sin \delta_p \pm E_p (1 - \cos \theta_p) \sin \\ &- R_p (\sin \delta_p - \sin \alpha_n) \cos \delta_p \cos \theta_p \mp r_1 \phi_1 \sin \delta_p = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

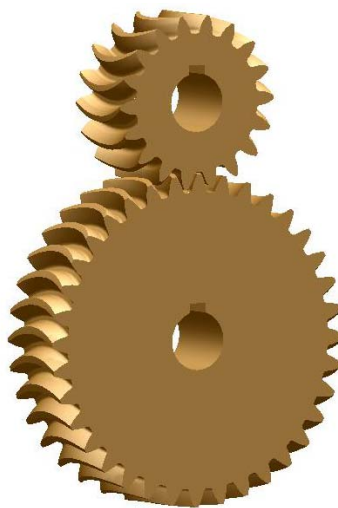
公式(3)為齒條刀刀面軌跡表示於齒輪的座標系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 中，其中 $x_c^{(P)}$ ， $y_c^{(P)}$ 與 $z_c^{(P)}$ 分別表示於公式(2)中，公式(4)則代表嚙合方程式，將公式(3)與(4)聯立，即可得到修整型曲線齒輪之左右齒面數學模式。

1.3 修整型曲線齒輪對電腦輔助繪圖

基於表一之修整型曲線齒輪對設計參數，將前述之齒面方程式利用電腦程式計算齒面座標點，然後匯入電腦繪圖軟體，即可得到如圖十三之修整型曲線齒輪對實體模型，可進一步作為後續齒面接觸分析及應力分析模型之基礎。

表一、修整型曲線齒輪組設計參數

	大齒輪	小齒輪
齒數	36	18
法向模數(mm)	3	3
法向壓力角 (degrees)	20	20
齒面寬(mm)	30	30
刀盤半徑 E_p (mm)	30	30
刀具法向剖面半 徑 R_p (mm)	500	500



圖十三、修整型曲線齒輪對之電腦繪圖實體模型

2. 修整型曲線齒輪過切分析

2.1 過切條件式

利用 Litvin[1]所提出的方法，分析修整型曲線齒輪之過切情形。由微分幾何

可以得知，若曲面上一點，其接觸向量不存在或切線向量大小等於零，則此點稱為奇異點。一般齒輪之齒面上不存在奇異點，若齒面上出現奇異點，即表示齒面上發生過切現象。本文以齒條刀之刀面 Σ_p 創成修整型曲線齒輪之齒面 Σ_1 ，在齒面創成過程中，齒條刀之刀面與修整型曲線齒輪之齒面的瞬間接觸點，其位置向量應相等。將 Σ_p 與 Σ_1 之瞬間接觸點表示於固定座標 $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ ，則下式必成立：

$$\mathbf{R}_c^{(P)} = \mathbf{R}_c^{(1)} \quad (5)$$

上式對時間微分可得

$$\mathbf{V}_{tr}^{(C)} + \mathbf{V}_r^{(C)} = \mathbf{V}_{tr}^{(1)} + \mathbf{V}_r^{(1)} \quad (6)$$

移項可整理得

$$\mathbf{V}_r^{(1)} = \mathbf{V}_r^{(C)} + \mathbf{V}_{tr}^{(C)} - \mathbf{V}_{tr}^{(1)} = \mathbf{V}_r^{(C)} + \mathbf{V}^{(C1)} \quad (7)$$

方程式(6)即(7)中之下標 tr 表示接觸點隨著刀具或齒面之運動速度，下標 r 表示接觸點沿刀具或齒面之切線速度。從奇異點的定義可得知，當 $\mathbf{V}_r^{(1)} = 0$ 時，齒面將產生奇異點，即齒面發生過切現象，故齒面發生過切之必要條件可表示如下：

$$\mathbf{V}_r^{(C)} + \mathbf{V}^{(C1)} = 0 \quad (8)$$

方程式(8)配合嚙合方程式對時間微分，表示如下：

$$\frac{d}{dt} f(\delta_p, \theta_p, \phi_1) = 0 \quad (9)$$

即可在齒條刀之刀面上定義出一限制曲線，而此限制曲線即為創成齒面產生過切現象之過切線。當刀面上的點位於限制曲線上或超過限制曲線，則這些刀面上之點將在齒面創成時造成齒面之過切。

由(8)式和(9)式可分別改寫成下列兩式：

$$\frac{\partial \mathbf{R}_C^{(P)}}{\partial \delta_p} \frac{d\delta_p}{dt} + \frac{\partial \mathbf{R}_C^{(P)}}{\partial \theta_p} \frac{d\theta_p}{dt} = -\mathbf{V}_C^{(C1)} \quad (10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \delta_p} \frac{d\delta_p}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \theta_p} \frac{d\theta_p}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial \phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \quad (11)$$

方程式(10)中之 $R_C^{(P)}$ 為刀面方程式表示於座標系 $S_C(X_C, Y_C, Z_C)$ ， $V_C^{(P1)}$ 則表示刀面 Σ_p 上的瞬間接觸點相對於齒面 Σ_1 上的瞬間接觸點之相對速度。方程式(10)及(11)可以表示成下列矩陣：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_c^{(P)}}{\partial \delta_p} & \frac{\partial x_c^{(P)}}{\partial \theta_p} \\ \frac{\partial y_c^{(P)}}{\partial \delta_p} & \frac{\partial y_c^{(P)}}{\partial \theta_p} \\ \frac{\partial z_c^{(P)}}{\partial \delta_p} & \frac{\partial z_c^{(P)}}{\partial \theta_p} \\ \frac{\partial f}{\partial \delta_p} & \frac{\partial f}{\partial \theta_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta_p}{dt} \\ \frac{\partial \theta_p}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{xc}^{(C1)} \\ -V_{yc}^{(C1)} \\ -V_{zc}^{(C1)} \\ -\frac{\partial f}{\partial \phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{bmatrix} \quad (12)$$

方程式(12)存在唯一解之充要條件為方程式(12)之擴增矩陣(Augmented Matrix)的秩(Rack)為二，亦即下列方程式必須同時滿足。

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c^{(P)}}{\partial \delta_p} & \frac{\partial x_c^{(P)}}{\partial \theta_p} & -V_{cx}^{(C1)} \\ \frac{\partial y_c^{(P)}}{\partial \delta_p} & \frac{\partial y_c^{(P)}}{\partial \theta_p} & -V_{cy}^{(C1)} \\ f_{\delta_p} & f_{\theta_p} & -f_{\phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c^{(P)}}{\partial \delta_p} & \frac{\partial x_c^{(P)}}{\partial \theta_p} & -V_{cx}^{(C1)} \\ \frac{\partial z_c^{(P)}}{\partial \delta_p} & \frac{\partial z_c^{(P)}}{\partial \theta_p} & -V_{cz}^{(C1)} \\ f_{\delta_p} & f_{\theta_p} & -f_{\phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_c^{(P)}}{\partial \delta_p} & \frac{\partial y_c^{(P)}}{\partial \theta_p} & -V_{cy}^{(C1)} \\ \frac{\partial z_c^{(P)}}{\partial \delta_p} & \frac{\partial z_c^{(P)}}{\partial \theta_p} & -V_{cz}^{(C1)} \\ f_{\delta_p} & f_{\theta_p} & -f_{\phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c^{(P)}}{\partial \delta_p} & \frac{\partial x_c^{(P)}}{\partial \theta_p} & -V_{cx}^{(C1)} \\ \frac{\partial y_c^{(P)}}{\partial \delta_p} & \frac{\partial y_c^{(P)}}{\partial \theta_p} & -V_{cy}^{(C1)} \\ \frac{\partial z_c^{(P)}}{\partial \delta_p} & \frac{\partial z_c^{(P)}}{\partial \theta_p} & -V_{cz}^{(C1)} \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

上式中之方程式(16)即為嚙合方程式，綜合方程式(13)至(15)式，可求得齒面 Σ_1 上奇異點之充分條件為包含三個未知數 δ_p ， θ_p 和 ϕ_1 之下列兩非線性方程式：

$$F(\delta_p, \theta_p, \phi_1) = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = 0 \quad (17)$$

$$f(\delta_p, \theta_p, \phi_1) = 0 \quad (18)$$

聯立方程組(17)式及(18)式中具有三個未知數，其求解的方法為將 θ_p 視為已知而給定一數值以求一組對應之 δ_p 和 ϕ_1 ，然後再將 θ_p 給予一增量，再求解另一組對應之 δ_p 和 ϕ_1 ，如此即可解得刀具上創成齒面奇異點之限制曲線。

2.2 過切線範例

通常在小齒數或壓力角較小的情況下，被創成齒面很容易產生過切現象，造成齒根應力集中以及接觸率降低。基於前一節所推導之過切條件判別式，撰寫為電腦程式後，可以判斷在各種設計參數下，齒面是否產生奇異點，並計算出齒面過切的位置，將其繪製在齒面上。

2.2.1 範例一

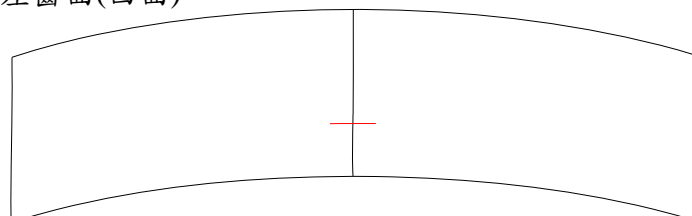
依據所發展之齒面過切計算程式，圖十四所示為修整型曲線齒輪之左右齒面產生過切的位置，其齒輪設計參數整理於表二。參見圖十之假想齒條刀之圓弧形法向剖面，左齒面為凹面，是由刀具之左面所創成，右齒面為凸面，是由刀具之右面所創成。

由圖十四可觀察得知，對修整型曲線齒輪，過切容易發生在齒面中央區域，同時，因為修整型曲線齒輪之齒形對齒面寬中央截面為對稱，所以過切線也是對中央截面對稱。然而，因為修整型曲線齒輪之左右齒面並非對稱，所以左右齒面產生的過切點位置並非完全相同。表三整理表示齒面過切點的座標與參數位置，可看出左齒面(凹面)比右齒面(凸面)較不易產生過切。

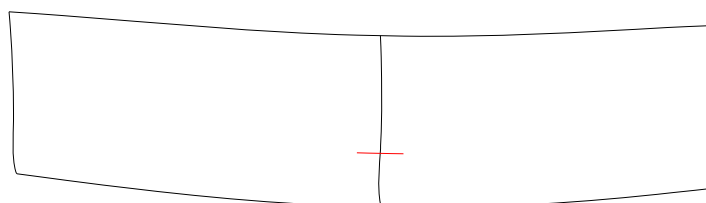
表二、修整型曲線齒輪組過切分析設計參數

齒數	18
法向模數(mm)	3
法向壓力角(degrees)	20
齒面寬(mm)	30
刀盤半徑 E_p (mm)	30
刀具法向剖面半徑 R_p (mm)	500

(a) 左齒面(凹面)



(b) 右齒面(凸面)



圖十四、過切範例一的 18 齒修整型曲線齒輪的齒面過切線

表三、過切範例一之左右齒面過切點發生位置

右齒面					
x_l	y_l	z_l	δ_P	θ_P	ϕ_l
24.502669,	-6.766882,	-2.500000,	0.342689,	-0.087372,	-0.256184
24.496460,	-6.803616,	-2.000000,	0.342695,	-0.069868,	-0.257718
24.491592,	-6.832150,	-1.500000,	0.342698,	-0.052383,	-0.259021
24.488100,	-6.852513,	-1.000000,	0.342699,	-0.034915,	-0.259703
24.485993,	-6.864722,	-0.500000,	0.342699,	-0.017455,	-0.260332
24.485288,	-6.868790,	0.000000,	0.342698,	0.000000,	-0.260881
24.485993,	-6.864722,	0.500000,	0.342699,	0.017455,	-0.260332
24.488100,	-6.852513,	1.000000,	0.342699,	0.034915,	-0.259703
24.491592,	-6.832150,	1.500000,	0.342698,	0.052383,	-0.259021
24.496460,	-6.803616,	2.000000,	0.342695,	0.069868,	-0.257718
24.502669,	-6.766882,	2.500000,	0.342689,	0.087372,	-0.256184
左齒面					
x_l	x_l	x_l	δ_P	θ_P	ϕ_l
25.357841,	-1.916136,	-0.500000,	0.342695,	-0.015949,	0.261144
25.357909,	-1.919910,	0.000000,	0.342698,	0.000000,	0.260881
25.357841,	-1.916136,	0.500000,	0.342695,	0.015949,	0.261144

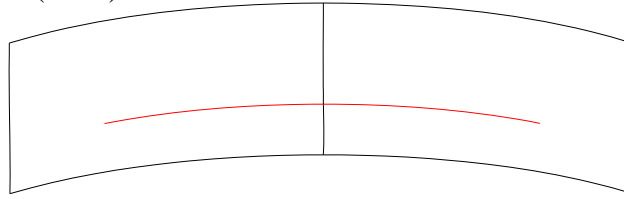
2.2.1 範例二

通常在少齒數與小壓力角下，齒面容易產生過切的發生。圖十五所示為當修整型曲線齒輪之齒數由 18 齒降低為 16 齒，其餘設計參數皆與表二所列相同，由圖可明顯看出齒面過切線較長，發生過切的情形比範例一嚴重。

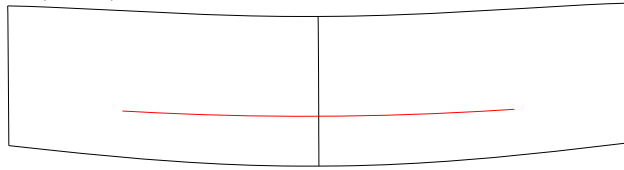
2.2.1 範例三

圖十六所示為齒數為維持 18 齒，但壓力角由 20 度減少為 14.5 度時的修整型曲線齒輪，因為壓力角降低造成過切更為嚴重，其左右齒面的過切線皆是橫斷整個齒面寬。

(a) 左齒面(凹面)

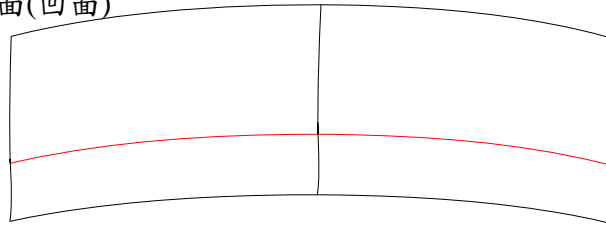


(b) 右齒面(凸面)



圖十五、過切範例二的 16 齒修整型曲線齒輪的齒面過切線

(a) 左齒面(凹面)



(b) 右齒面(凸面)

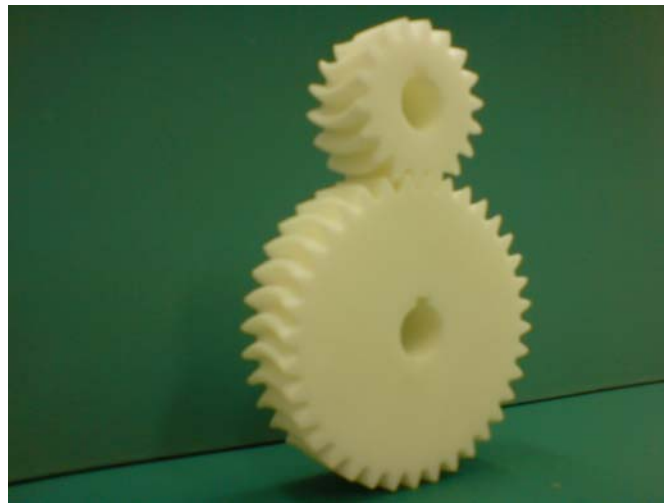


圖十六、過切範例三的 18 齒、壓力角為 14.5° 時，修整型曲線齒輪之齒面過切線

3. 修整型曲線齒輪之製造

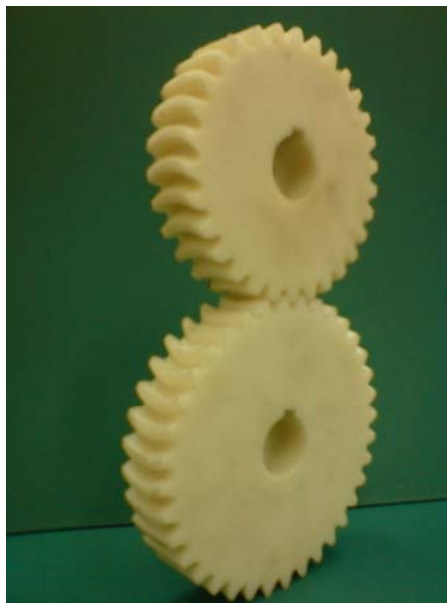
利用本研究先前所建立的曲線齒輪齒面數學模式，可精確地計算出完整的齒面，包含齒面工作區、齒根圓角及齒底部分。利用此數學模式，首先使用快速成型技術(Rapid Prototyping)製造修整型曲線齒輪原型(Prototype)，材質為

ABS(Acrylonitrile Butadiene Styrene)，如圖十七所示，以快速驗證數學模式之正確性。



圖十七、快速成型加工之修整形曲線齒輪

齒輪組的 CAD 實體模型可經由五軸 CNC 加工機之轉換程式，轉換成五軸 CNC 加工機之機械碼，即可利用五軸 CNC 加工機製造出修整型曲線齒輪。為配合未來研究之測試條件，依據表一之齒輪設計參數，改變齒數與模數兩參數，小齒輪齒數為 30 齒；大齒輪齒數為 36 齒，模數增大為 4mm，材質為 MC 塑鋼(尼龍鋼)。實際切削完成的修整型曲線齒輪組如圖十八所示。



圖十八、五軸 CNC 加工機製造之修整形曲線齒輪

4. 參考文獻

1. Litvin, F. L., 1994a, *Gear Geometry and Applied Theory*, Prentice-Hall, New Jersey.
2. Litvin, F. L., Zhang, J., Handschuh, R. F. and Coy, J. J., 1989a, "Topology of Modified Helical Gears," *Surface Topography*, pp. 41-58.
3. Litvin, F. L., Chen, N. X., Hsiao, C. L. and Handschuh, R. F., 1994b, "Generation of Helical Gears with New Surfaces Topology by Application of CNC Machines," *Gear Technology*, pp. 30-33.
4. Litvin, F. L., Chen, N. X., Lu, J. and Handschuh, R. F., 1995, "Computerized Design and Generation of Low-Noise Helical Gears with Modified Surface Topology," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 117, pp. 254-261.
5. Litvin, F. L. and Kim, D. H., 1997, "Computerized Design, Generation and Simulation of Modified Involute Spur Gears with Localized Bearing Contact and Reduced Level of Transmission Errors," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 119, pp. 96-100.
6. Mark, W. D., 1989, "The Generalized Transmission Error of Parallel-Axis Gears," *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Vol. 111, pp. 414-423.
7. Litvin, F. L., 1989b, *Theory of Gearing*, NASA Publication RP-1212, Washington D. C.
8. Chang, S. L., Tsay, C. B. and Tseng, C. H., 1997, "Kinematic Optimization of a Modified Helical Gear Train," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 119, pp. 307-314.
9. Tsay, C. B., 1988, "Helical Gears with Involute Shaped Teeth: Geometry, Computer Simulation, Tooth Contact Analysis, and Stress Analysis," *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Vol. 110, pp. 482-491.
10. Tsay, C. B. and Fong, Z. H., 1991, "Computer Simulation and Stress Analysis of Helical Gears with Pinion Circular Arc and Gear Involute Teeth," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, Vol. 26, pp. 145-154.
11. Litvin, F. L., Chen, J. S., Lu, J. and Handschuh, R. F., 1996, "Application of Finite Element Analysis for Determination of Load Share, Real Contact Ratio,

- Precision of Motion, and Stress Analysis,” *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 118, pp. 561-567.
12. Umeyama, M., Kato, M. and Inoue, K., 1998, “Effects of Gear Dimensions and Tooth Surface Modifications on the Loaded Transmission Error of a Helical Gear Pair,” *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 120, pp. 119-125.
 13. Zhang, Y. and Fang, Z., 1997, “Analysis of Transmission Errors Under Load of Helical Gears with Modified Tooth Gears,” *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 119, pp. 120-126.
 14. Yi-Cheng Chen and Chung-Biau Tsay, 2001, “Mathematical model and undercutting analysis of modified circular-arc helical gears,” *Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, Vol.22, No.1, pp.41-51.
 15. Yi-Cheng Chen and Chung-Biau Tsay, 2000, “Tooth contact analysis and kinematic optimization of a modified helical gear pair with involute-teeth pinion and modified circular-arc-teeth gear,” *Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, Vol.21, No.6, pp.537-547.
 16. Yi-Cheng Chen and Chung-Biau Tsay, 2001, “Contact ratios and transmission errors of a helical gear set with involute-teeth pinion and modified circular-arc-teeth gear,” *JSME International Journal-Series C*, Vol.44, No.3, pp.867-874.
 17. Liu Shue-Tseng, 1988, “Curvilinear Cylindrical Gears,” *Gear Technology* (May/June), pp.8-12
 18. Yuitang Dai, Yukinori Ariga and Shigeyoshi Nagata, 1999, “Study on a cylindrical gear with curved tooth traces,” *Tenth world congress on the theory of machine and mechanisms*, Oulu, Finland, pp.2337-2342.
 19. Rui-Tang Tseng and Chung-Biau Tsay, 2001, “Mathematical model and undercutting of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth,” *Mechanism and Machine Theory*, Vol.36, pp.1189-1202.
 20. Rui-Tang Tseng and Chung-Biau Tsay, 2004, “Contact characteristics of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth,” *Mechanism and Machine Theory*, Vol.39, pp.905-919.
 21. 曾瑞堂，「曲線齒圓柱型齒輪之齒面數學模式與接觸分析」，國立交通大學，碩士論文，新竹，台灣，1999 年 6 月。

5. 計畫成果自評

本研究已完成之工作項目計有：

- (1) 完成刀具設計及三維齒條刀數學模式之建立。
- (2) 完成具齒形修整之曲線齒輪齒面之數學模式與
- (3) 完成修整型曲線齒形繪圖電腦軟體與實體模型。
- (4) 完成具齒形修整之曲線齒輪齒面過切條件式與電腦分析軟體。
- (5) 完成具齒形修整之曲線齒輪之加工。

已完成的工作項目，和原先計畫預定完成的項目完全相同。在學術上，利用本研究所推導之修整型曲線齒輪數學模式與電腦實體模型，進行單一對齒輪之有限元素接觸應力分析，研究成果已投稿第 26 屆中國機械工程學會研討會並獲接受，論文題目為”修整型曲線齒輪之有限元素接觸分析”。在產業應用上，具齒形修整之曲線齒輪具有較高的彎曲強度、抗壓強度及對組裝誤差不敏感之特性，十分適用於傳遞高負載及精密傳動機構，利用本研究計畫所推導之數學模式與過切方程式，以及相關電腦程式，可有效協助未來業界設計或使用修整型曲線齒輪時，選取設計參數之參考依據。

此外，基於本研究所推導之數學模式，可進一步進行修整型曲線齒輪之齒面接觸分析，探討其傳動誤差、接觸率、接觸橢圓等深具學術性與產業應用價值的研究題目。因此本計劃主持人於 98 年度再次申請國科會計畫，題目為”修整型曲線齒輪對之傳動特性研究”，執行期限為 98 年 8 月 1 日至 99 年 7 月 31 日。目前已齒面接觸分析程式已撰寫，並獲致初步接觸分析結果，未來將進行參數化之分析，並可將接觸分析結果投稿至研討會或期刊發表。